

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный технический университет

Аксёнов А.П.
СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1998

УДК 512.1

Аксёнов А.П. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998, 124 с.

Пособие соответствует государственному стандарту дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)» направления бакалаврской подготовки 510200 «Прикладная математика и информатика».

Содержит изложение теоретического материала в соответствии с действующей программой по темам: «Нормальные системы ОДУ и методы их интегрирования», «Интегрирование линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка», «Линейные системы ОДУ (общая теория)», «Линейные однородные и неоднородные системы ОДУ с постоянными коэффициентами», «Линейные однородные системы ОДУ с периодическими коэффициентами», «Устойчивость по А.М. Ляпунову решений систем ОДУ».

В связи с широким применением матричного исчисления к исследованию и решению систем ОДУ каждый раз по мере необходимости дано подробное изложение соответствующих разделов теории матриц.

Предназначено для студентов физико-механического факультета специальностей 010200, 010300, 071100, 210300, а также для преподавателей, ведущих практические занятия. В качестве дополнительного материала может быть использовано также студентами других факультетов университета.

Ил. 2. Библ. 7 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

§ 1. Основные понятия и определения

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (\tilde{1})$$

Если ввести в рассмотрение вектор-функции

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix},$$

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

2°. Определение. Решением системы (1) в $\langle a, b \rangle$ называют всякую вектор-

функцию $Y(x) = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$, $x \in \langle a, b \rangle$, обладающую свойствами:

$$1) \text{ для любого } x \in \langle a, b \rangle \text{ существует } \boldsymbol{\varphi}'(x) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(x) \\ \varphi'_2(x) \\ \dots \\ \varphi'_n(x) \end{pmatrix};$$

$$2) \text{ для любого } x \in \langle a, b \rangle \text{ точка } (x, \boldsymbol{\varphi}(x)) \in (D);$$

$$3) \text{ для любого } x \in \langle a, b \rangle \boldsymbol{\varphi}'(x) = \mathbf{F}(x, \boldsymbol{\varphi}(x)).$$

Заметим, что вектор-функция $\mathbf{F}(x, \boldsymbol{\varphi}(x)) \in C(\langle a, b \rangle)$ как суперпозиция непрерывных функций. А тогда из свойства 3) следует, что $\boldsymbol{\varphi}'(x) \in C(\langle a, b \rangle)$, то есть любое решение системы (1) в $\langle a, b \rangle$ непрерывно дифференцируемо.

3°. Задача Коши для системы (1) состоит в следующем: среди всех решений системы (1) найти такое решение $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$, которое удовлетворяет условию

$$\mathbf{Y}(x)|_{x=x_0} = \mathbf{Y}_0. \quad (2)$$

В (2) $x_0, \mathbf{Y}_0$ – любые, но такие, что точка $(x_0, \mathbf{Y}_0) \in (D)$.

4°. Пусть дана система $\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$ (1) и дано начальное условие $\mathbf{Y}(x)|_{x=x_0} = \mathbf{Y}_0$ (2). Пусть $\mathbf{Y} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}} = (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$, и $\mathbf{Y} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\tilde{\delta}}} = (x_0 - \tilde{\tilde{\delta}}, x_0 + \tilde{\tilde{\delta}})$, – любые два решения задачи (1) – (2). Тогда: если существует интервал $I_{\delta} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такой, что $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x) \equiv \tilde{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}}(x)$, $x \in I_{\delta}$, то говорят, что задача (1) – (2) имеет единственное решение. Точку $(x_0, \mathbf{Y}_0) \in (D)$ называют в этом случае точкой единственности системы (1).

Пусть область $(D_1) \subset (D)$, и пусть каждая точка $(x, \mathbf{Y}) \in (D_1)$ является точкой единственности системы (1). Тогда (D_1) называют областью единственности системы (1).

§ 2. Некоторые сведения из теории вектор-функций

Напомним некоторые факты из теории вектор-функций, используемые при рассмотрении систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$1^\circ. \text{ Пусть } \mathbf{R}^n \text{ – } n\text{-мерное векторное пространство. Пусть вектор } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ –}$$

любой из $\mathbf{R}^n$. За *норму* вектора $\mathbf{X}$ принимают по определению

$$\|\mathbf{X}\| = \max_{(i=1, n)} \{|x_i|\}.$$

2°. Расстояние $\rho(\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}})$ между любыми двумя точками $\tilde{X}$ и $\tilde{\tilde{X}}$ из $\mathbf{R}^n$ определяют соотношением

$$\rho(\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}}) = \|\tilde{\tilde{X}} - \tilde{X}\|.$$

3°. Пусть $X^{(0)}$ – любая фиксированная точка из $\mathbf{R}^n$. δ -окрестность точки $X^{(0)}$ определяется соотношением

$$U_\delta(X^{(0)}) = \left\{ X, \|X - X^{(0)}\| < \delta \right\}.$$

Так как $\|X - X^{(0)}\| < \delta \Leftrightarrow |x_i - x_i^{(0)}| < \delta, i = \overline{1, n}$, то заключаем, что $U_\delta(X^{(0)})$ – n -мерный куб с центром в точке $X^{(0)}$ и ребром 2δ .

4°. Пусть $\{X^{(k)}\}_{k \in \mathbf{N}}$ – последовательность векторов из $\mathbf{R}^n$. Пусть $X^{(0)}$ – фиксированная точка в $\mathbf{R}^n$. Говорят, что последовательность $\{X^{(k)}\}_{k \in \mathbf{N}}$ сходится к $X^{(0)}$ при $k \rightarrow \infty$, и пишут $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X^{(0)}$, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер K такой, что как только $k > K$, так сейчас же $\|X^{(k)} - X^{(0)}\| < \varepsilon$. Отметим, что $\|X^{(k)} - X^{(0)}\| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_i^{(k)} - x_i^{(0)}| < \varepsilon, i = \overline{1, n}$. Из этого следует, что сходимость в пространстве $\mathbf{R}^n$ осуществляется покомпонентно, то есть

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X^{(0)} \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)}, i = \overline{1, n} \right).$$

5°. Введем в рассмотрение вектор $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$. Здесь $x \in \mathbf{R}^1$,

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – функции от x , определенные в некотором промежутке $\langle a, b \rangle$. $Y(x)$ называется *вектор-функцией* скалярного аргумента x , определенной в $\langle a, b \rangle$.

Говорят, что вектор-функция $Y(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$, если в этой точке непрерывны одновременно функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Производная вектор-функции $Y(x)$ в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ определяется соотно-

шением $Y'(x_0) = \begin{pmatrix} y_1'(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \dots \\ y_n'(x_0) \end{pmatrix}$. $Y'(x_0)$ существует, если существуют одновременно $y_1'(x_0), y_2'(x_0), \dots, y_n'(x_0)$.

Пусть вектор-функция $Y(x)$ определена в $[a, b]$. $\int_a^b Y(x) dx$ определяется соотношением

$$\int_a^b Y(x) dx = \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x) dx \\ \int_a^b y_2(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b y_n(x) dx \end{pmatrix}.$$

$\int_a^b Y(x) dx$ существует, если существуют одновременно $\int_a^b y_1(x) dx$, $\int_a^b y_2(x) dx$,
 $\dots$, $\int_a^b y_n(x) dx$.

Отметим, что $\left\| \int_a^b Y(x) dx \right\| \leq \left| \int_a^b \|Y(x)\| dx \right|$. В самом деле, имеем

$$\left\| \int_a^b Y(x) dx \right\| = \max_{(i=1, n)} \left| \int_a^b y_i(x) dx \right| = \left| \int_a^b y_{i_0}(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |y_{i_0}(x)| dx \right| \leq \left| \int_a^b \|Y(x)\| dx \right|.$$

6°. Рассмотрим вектор-функцию $F(x, Y)$ вида

$$F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbf{R}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$. Будем считать, что $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$,

$i = \overline{1, n}$, определены в некоторой области $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Частные производные вектор-функции $F(x, Y)$: $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial y_i}$

$(i = \overline{1, n})$ определяются соотношениями

$$\frac{\partial F(x, Y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial F(x, Y)}{\partial y_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_i} \end{pmatrix} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Символами $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial(x, Y)}$ и $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y}$ обозначают соответственно:

$$\frac{\partial F(x, Y)}{\partial(x, Y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} - \text{матрица Якоби,}$$

$$\frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

7°. Теорема о полном приращении вектор-функции.

Пусть

- 1) вектор-функция $F(x, Y) \in C(D)$ ($(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$);
- 2) область (D) выпукла по Y , т.е. для любых двух точек $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \tilde{\tilde{Y}})$ из (D) оказывается, что отрезок, их соединяющий, лежит в (D) ;
- 3) $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} \in C(D)$.

Тогда для любых двух точек $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \tilde{\tilde{Y}})$ из (D) справедливо соотношение:

$$F(x, \tilde{\tilde{Y}}) - F(x, \tilde{Y}) = \int_0^1 \frac{\partial F(x, \tilde{Y} + t(\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}))}{\partial Y} \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}) dt. \quad (1)$$

► Пусть $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \tilde{\tilde{Y}})$ – любые две точки из (D) . Соединим их прямолинейным отрезком. Его параметрические уравнения будут такими:

$$\begin{cases} x = x, \\ Y = \tilde{Y} + t \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}), \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

В точках этого прямолинейного отрезка будем иметь:

$$F(x, Y) = F(x, \tilde{Y} + t \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})) = \psi(t), \quad t \in [0, 1].$$

$\psi(t)$ – векторная функция скалярного аргумента t :

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \dots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}; \quad \psi_i(t) = f_i(x, \tilde{y}_1 + t(\tilde{\tilde{y}}_1 - \tilde{y}_1), \dots, \tilde{y}_n + t(\tilde{\tilde{y}}_n - \tilde{y}_n)) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Отметим, что

- 1) $\psi(t) \in C([0, 1])$ как суперпозиция непрерывных функций.
- 2) $\psi(t)$ имеет на $[0, 1]$ непрерывную производную

$$\psi'(t) = \begin{pmatrix} \psi'_1(t) \\ \dots \\ \psi'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(x, \tilde{Y} + t(\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})) \cdot (\tilde{\tilde{y}}_j - \tilde{y}_j) \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial y_j}(x, \tilde{Y} + t(\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})) \cdot (\tilde{\tilde{y}}_j - \tilde{y}_j) \end{pmatrix}.$$

Из выражения для $\psi'(t)$ видим, что $\psi'(t) \in C([0, 1])$. А тогда для функции $\psi(t)$ справедлива формула Ньютона – Лейбница:

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt,$$

то есть

$$\begin{aligned} \psi_i(1) - \psi_i(0) &= f_i(x, \tilde{\tilde{Y}}) - f_i(x, \tilde{Y}) = \int_0^1 \psi'_i(t) dt = \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \tilde{Y} + t(\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})) \cdot (\tilde{\tilde{y}}_j - \tilde{y}_j) \right) dt, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Замечаем, что (2) есть покомпонентная запись формулы (1). Следовательно, формула (1) установлена. ◀

8°. Определение. Говорят, что вектор-функция $F(x, Y)$ удовлетворяет в области $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ условию Липшица по Y , если существует число $L > 0$, такое, что для любых двух точек $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \tilde{\tilde{Y}})$ из (D) справедливо соотношение

$$\|F(x, \tilde{\tilde{Y}}) - F(x, \tilde{Y})\| \leq L \cdot \|\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}\|.$$

Обозначение: $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$.

Определение. Говорят, что вектор-функция $F(x, Y)$ удовлетворяет в области $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ условию Липшица по Y локально, если для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ существует окрестность $U(x_0, Y_0) \subset (D)$, такая, что

$$F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U(x_0, Y_0)).$$

Пишут: $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$, локально.

На вопрос, при каких условиях функция $F(x, Y)$ наверняка удовлетворяет в области (D) условию Липшица по Y локально, ответ дает следующая теорема.

Теорема. Пусть $F(x, Y)$ определена и непрерывна в области $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Пусть $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} \in C(D)$. Тогда $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$, локально.

► Возьмем в области (D) любую точку (x_0, Y_0) . Рассмотрим окрестность этой точки: $U_\delta(x_0, Y_0)$. Будем считать δ столь малым, чтобы было $\bar{U}_\delta(x_0, Y_0) \subset (D)$ (это возможно, ибо (D) – область). Покажем, что $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U(x_0, Y_0))$

По условию $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} \in C(D) \Rightarrow \frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} \in C(\bar{U}_\delta(x_0, Y_0)) \Rightarrow \frac{\partial f_i(x, Y)}{\partial y_j} \in C(\bar{U}_\delta(x_0, Y_0)), i, j = \overline{1, n} \Rightarrow$ существует число $K > 0$, такое, что $\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq K$ в $\bar{U}_\delta(x_0, Y_0)$ для любых $i, j = \overline{1, n} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq K$ в $U_\delta(x_0, Y_0)$ при любых $i, j = \overline{1, n}$.

Очевидно, что $U_\delta(x_0, Y_0)$ – выпуклая область (в частности, она выпуклая по Y).

Видим, что для $F(x, Y)$ в $U_\delta(x_0, Y_0)$ выполнены все условия теоремы о полном приращении вектор-функции. Поэтому для любых двух точек $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \tilde{\tilde{Y}})$ из $U_\delta(x_0, Y_0)$ будем иметь:

$$\begin{aligned} F(x, \tilde{\tilde{Y}}) - F(x, \tilde{Y}) &= \int_0^1 \frac{\partial F(x, \tilde{Y} + t \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}))}{\partial Y} \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\| F(x, \tilde{\tilde{Y}}) - F(x, \tilde{Y}) \right\| \leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial F(x, \tilde{Y} + t \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}))}{\partial Y} \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}) \right\| dt = \\ &= \int_0^1 \max_{i=1, n} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \cdot (\tilde{y}_j - \tilde{\tilde{y}}_j) \right| dt \leq \int_0^1 K \cdot n \cdot \left\| \tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y} \right\| dt = \underbrace{K \cdot n}_{=L, \text{--обозн.}} \cdot \left\| \tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y} \right\| = L \cdot \left\| \tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y} \right\| \Rightarrow \end{aligned}$$

Итак, показано, что для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ существует окрестность $U_\delta(x_0, Y_0) \subset (D)$, такая, что $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U_\delta(x_0, Y_0)) \Rightarrow F(x, Y)$ удовлетворяет условию Липшица по Y локально. ◀

§3. Существование и единственность решения задачи Коши нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Пусть даны система

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y), \quad F(x, Y) \in C(D), \quad (1)$$

и начальное условие

$$Y|_{x=x_0} = Y_0, \quad (x_0, Y_0) \in (D). \quad (2)$$

Будем искать решение задачи (1) – (2) методом последовательных приближений Пикара.

Положим $\psi_0(x) = Y_0$, $x \in \mathbf{R}$ ($\psi_0(x)$ – “нулевое” приближение). Существует интервал (α_1, β_1) , содержащий точку x_0 , такой, что для любого $x \in (\alpha_1, \beta_1)$ будет: точка $(x, \psi_0(x)) \in (D)$. Положим

$$\psi_1(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_0(x)) dx, \quad x \in (\alpha_1, \beta_1).$$

Так как $(x, \psi_0(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_1, \beta_1)$, то $F(x, \psi_0(x)) \in C((\alpha_1, \beta_1))$ и, следовательно, $\int_{x_0}^x F(x, \psi_0(x)) dx$ существует ($\psi_1(x)$ – “первое” приближение).

Имеем

$$\begin{aligned} \psi_1'(x) &= F(x, \psi_0(x)) \Rightarrow \psi_1'(x_0) = F(x_0, \psi_0(x_0)) = F(x_0, Y_0); \\ \psi_1(x_0) &= Y_0, \end{aligned}$$

то есть кривая $Y = \psi_1(x)$ проходит через точку (x_0, Y_0) и такая, что $Y'(x_0) = \psi_1'(x_0) = F(x_0, Y_0)$.

Существует интервал (α_2, β_2) , содержащий точку x_0 , такой, что точка $(x, \psi_1(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_2, \beta_2)$. Положим

$$\psi_2(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_1(x)) dx, \quad x \in (\alpha_2, \beta_2).$$

Так как $(x, \psi_1(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_2, \beta_2)$, то $F(x, \psi_1(x)) \in C((\alpha_2, \beta_2))$ и, следовательно, $\int_{x_0}^x F(x, \psi_1(x)) dx$ существует ($\psi_2(x)$ – “второе” приближение).

Имеем

$$\begin{aligned}\psi_2'(x) &= F(x, \psi_1(x)) \Rightarrow \psi_2'(x_0) = F(x_0, \psi_1(x_0)) = F(x_0, Y_0); \\ \psi_2(x_0) &= Y_0,\end{aligned}$$

то есть кривая $Y = \psi_2(x)$ проходит через точку (x_0, Y_0) и такая, что $Y'(x_0) = \psi_2'(x_0) = F(x_0, Y_0)$.

Продолжая этот процесс аналогичным образом дальше, получим

$$\psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_{k-1}(x)) dx, \quad x \in (\alpha_k, \beta_k),$$

где $k \in \mathbf{N}$, $k > 2$; (α_k, β_k) – некоторый интервал, содержащий точку x_0 и такой, что точка $(x, \psi_{k-1}(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_k, \beta_k)$ ($\psi_k(x)$ – k -е приближение). И здесь кривая $Y = \psi_k(x)$ проходит через точку (x_0, Y_0) и такая, что $Y'(x_0) = \psi_k'(x_0) = F(x_0, Y_0)$.

Лемма (о приближениях Пикара). Пусть числа $a > 0$, $b > 0$ – такие, что параллелепипед

$$(\bar{P}_{ab}) = \{(x, Y), |x - x_0| \leq a; \|Y - Y_0\| \leq b\} \subset (D).$$

Пусть $M = \max_{(\bar{P}_{ab})} \|F(x, Y)\|$, $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. Тогда все приближения Пикара $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ определены и непрерывны на отрезке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ и удовлетворяют неравенству $\|\psi_k(x) - Y_0\| \leq b$, $x \in I$. (Это означает, что графики вектор-функций $Y = \psi_k(x)$, $x \in I$, $k = 0, 1, 2, \dots$ лежат целиком в $(\bar{P}_{ab})$.)

► Рассмотрим $Y = \psi_0(x)$ ($\psi_0(x) \equiv Y_0$, $x \in \mathbf{R}$). Это приближение определено и непрерывно на всей вещественной оси; следовательно, оно определено и непрерывно на отрезке I . Для $x \in I$ имеем

$$\|\psi_0(x) - Y_0\| = \|Y_0 - Y_0\| \leq b.$$

Допустим, что $Y = \psi_{k-1}(x)$ определено и непрерывно на I и удовлетворяет неравенству:

$$\|\psi_{k-1}(x) - Y_0\| \leq b, \quad x \in I.$$

Имеем тогда

$$\psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_{k-1}(x)) dx.$$

Точки $(x, \psi_{k-1}(x)) \in (\bar{P}_{ab})$, для любого $x \in I \Rightarrow F(x, \psi_{k-1}(x)) \in C(I)$ как суперпозиция непрерывных функций $\Rightarrow \psi_k(x) \in C(I)$.

Имеем далее, для $x \in I$

$$\begin{aligned} \|\psi_k(x) - Y_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x F(x, \psi_{k-1}(x)) dx \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|F(x, \psi_{k-1}(x))\| dx \right| \leq M \cdot \left| \int_{x_0}^x dx \right| = M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot h \leq b, \end{aligned}$$

ибо $h \leq \frac{b}{M}$.

Видим, что переход от $k-1$ к k сделан. Для $\psi_0(x)$ утверждение леммы проверено непосредственно. В силу перехода от $k-1$ к k , утверждение леммы будет справедливо для $\psi_k(x)$, где $k = 1, 2, \dots$.

2°. Лемма Гронуола. Пусть

- 1) $f(x) \in C(\langle a, b \rangle)$;
- 2) $f(x)$ удовлетворяет на $\langle a, b \rangle$ неравенству

$$0 \leq f(x) \leq \lambda + \mu \cdot \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right|,$$

где $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ – постоянные числа.

Тогда справедливо неравенство

$$0 \leq f(x) \leq \lambda e^{\mu|x-x_0|}, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

► Доказательство проведем для $x \in [x_0, b)$; для $x \in \langle a, x_0]$ оно аналогичное.

1-й случай: $\lambda > 0$.

Имеем по условию: $0 \leq f(x) \leq \lambda + \mu \int_{x_0}^x f(t) dt$, $x \in [x_0, b)$. Положим

$$g(x) = \lambda + \mu \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in [x_0, b). \text{ Нетрудно понять, что } g(x) \in C^1([x_0, b));$$

$g(x_0) = \lambda > 0$. Имеем $g'(x) = \mu \cdot f(x) \geq 0$, $x \in [x_0, b) \Rightarrow g(x)$ – неубывающая на промежутке $[x_0, b) \Rightarrow g(x) \geq \lambda > 0$, $x \in [x_0, b)$.

Так как $g'(x) = \mu \cdot f(x)$, а $f(x) \leq g(x)$, $x \in [x_0, b)$, то $g'(x) \leq \mu \cdot g(x)$, $x \in [x_0, b) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} \leq \mu$, $x \in [x_0, b)$. Проинтегрировав последнее неравенство по отрезку $[x_0, x] \subset [x_0, b)$, получим

$$\begin{aligned}\ln \frac{g(x)}{g(x_0)} &\leq \mu \cdot (x - x_0), \quad x \in [x_0, b] \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x_0)} \leq e^{\mu(x-x_0)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow g(x) \leq \underbrace{g(x_0)}_{=\lambda} \cdot e^{\mu(x-x_0)} = \lambda \cdot e^{\mu(x-x_0)}.\end{aligned}$$

Следовательно, и подаловно $0 \leq f(x) \leq \lambda e^{\mu(x-x_0)}$, $x \in [x_0, b]$.

2-й случай: $\lambda = 0$.

Имеем по условию в этом случае $0 \leq f(x) \leq \mu \int_{x_0}^x f(t) dt$, $x \in [x_0, b]$. Возьмем

последовательность чисел $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ – любую, но такую, что $\lambda_n > 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ будем иметь

$$0 \leq f(x) < \lambda_n + \mu \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in [x_0, b].$$

Так как функция $f(x)$ удовлетворяет последнему неравенству, то получаем предыдущий случай. Следовательно, будем иметь:

$$0 \leq f(x) \leq \lambda_n \cdot e^{\mu(x-x_0)}, \quad x \in [x_0, b], \quad n \in \mathbf{N} - \text{любое.}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$ и приняв во внимание, что $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, получим

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in [x_0, b].$$

Видим, что и в этом случае лемма доказана. ◀

3°. Теорема Пикара. Пусть имеется система $\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$. Пусть

$F(x, Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ – локально. Тогда для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ задача (1) – (2) имеет решение $Y = \varphi(x)$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, причем это решение задачи (1) – (2) единственно.

► Возьмем произвольную точку $(x_0, Y_0) \in (D)$. По условию, $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ – локально $\Rightarrow$ существует $U_\delta(x_0, Y_0)$, такая, что $U_\delta(x_0, Y_0) \subset (D)$, и $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U_\delta(x_0, Y_0))$. Пусть $L > 0$ – постоянная Липшица для $F(x, Y)$ в $U_\delta(x_0, Y_0)$. Возьмем числа a, b ($a > 0, b > 0$) такие, что $(\bar{P}_{ab}) \subset U_\delta(x_0, Y_0)$. Пусть $M = \max_{(\bar{P}_{ab})} \|F(x, Y)\|$, $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. По лемме, доказанной выше, все приближения Пикара

$$\psi_0(x) \equiv Y_0, \quad \psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_{k-1}(x)) dx \quad (k=1, 2, \dots)$$

определены и непрерывны на отрезке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ и удовлетворяют условию

$$\|\psi_k(x) - Y_0\| \leq b.$$

1) Покажем, что $\{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится равномерно относительно x на I . Для этого рассмотрим функциональный ряд

$$\psi_0(x) + [\psi_1(x) - \psi_0(x)] + \dots + [\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)] + \dots \quad (3)$$

Замечаем, что $S_0(x) = \psi_0(x)$, $S_1(x) = \psi_1(x)$, ..., $S_k(x) = \psi_k(x)$, Значит, равномерная сходимость последовательности $\{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $x \in I$, равносильна равномерной сходимости ряда (3) на I . Установим равномерную сходимость ряда (3) на I . Для этого произведем оценку членов ряда (3). Имеем

$$\|\psi_0(x)\| = \|Y_0\|, \quad x \in I.$$

$$\begin{aligned} \|\psi_1(x) - \psi_0(x)\| &= \|\psi_1(x) - Y_0\| = \left\| \int_{x_0}^x F(x, Y_0) dx \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|F(x, Y_0)\| dx \right| \leq \underline{M \cdot |x - x_0|} \leq M \cdot h = \frac{M}{L} \cdot (Lh), \quad x \in I. \end{aligned}$$

Имеем, далее:

$$\begin{aligned} \|\psi_2(x) - \psi_1(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x (F(x, \psi_1(x)) - F(x, \psi_0(x))) dx \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \underbrace{\|F(x, \psi_1(x)) - F(x, \psi_0(x))\|}_{(\bullet) \in (\bar{P}_{ab})} dx \right| \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \underbrace{\|\psi_1(x) - \psi_0(x)\|}_{\leq M \cdot |x - x_0|} dx \right| \leq \\ &\leq L \cdot M \cdot \left| \int_{x_0}^x |x - x_0| dx \right| = L \cdot M \frac{|x - x_0|^2}{2} \leq \frac{ML}{2} \cdot h^2 = \frac{M}{L} \cdot \frac{(L \cdot h)^2}{2!}, \quad x \in I. \end{aligned}$$

Допустим, что

$$\|\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)\| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^k}{k!} |x - x_0|^k \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^k \cdot h^k}{k!}, \quad x \in I. \quad (4)$$

Но тогда

$$\|\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\| = \left\| \int_{x_0}^x (F(x, \psi_k(x)) - F(x, \psi_{k-1}(x))) dx \right\| \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq \left| \int_{x_0}^x \|F(x, \psi_k(x)) - F(x, \psi_{k-1}(x))\| dx \right| \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)\| dx \right| \leq \\ & \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^{k+1}}{k!} \left| \int_{x_0}^x |x - x_0|^k dx \right| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^{k+1}}{(k+1)!} \cdot |x - x_0|^{k+1} \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L \cdot h)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad x \in I. \end{aligned}$$

Видим, что переход от k к $k+1$ сделан. Значит, оценка (4) справедлива на I для любого $k \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение ряд

$$\|Y_0\| + \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)}{1!} + \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^2}{2!} + \dots + \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^k}{k!} + \dots \quad (5)$$

Ряд (5) – числовой, положительный, сходящийся. Он является мажорантным для ряда (3) на $I \Rightarrow$ функциональный ряд (3) сходится равномерно на I .

Пусть $\varphi(x)$, $x \in I$ – сумма ряда (3). Имеем $S_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(x)$, $x \in I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(x), \quad x \in I. \quad (6)$$

Так как $\psi_k(x) \in C(I)$, то из (6) $\Rightarrow \varphi(x) \in C(I)$.

2) Покажем, что вектор-функция $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, является решением задачи (1) – (2). Для этого берем k -е приближение Пикара

$$\psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_{k-1}(x)) dx, \quad x \in I. \quad (7)$$

Было показано, что $\psi_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(x)$, $x \in I$. Покажем теперь, что

$$F(x, \psi_{k-1}(x)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F(x, \varphi(x)), \quad x \in I.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. У нас $F(x, Y) \in C(\bar{P}_{ab}) \Rightarrow F(x, Y)$ равномерно непрерывная в $(\bar{P}_{ab}) \Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε , такое, что для любых двух точек $(\tilde{x}, \tilde{Y})$ и $(\tilde{x}, \tilde{\tilde{Y}})$ из $(\bar{P}_{ab})$, для которых $|\tilde{x} - \tilde{x}| < \delta$, $\|\tilde{Y} - \tilde{\tilde{Y}}\| < \delta$, будет $\|F(\tilde{x}, \tilde{\tilde{Y}}) - F(\tilde{x}, \tilde{Y})\| < \varepsilon$. У нас $\psi_{k-1}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(x)$, $x \in I \Rightarrow$ по

числу $\delta > 0$ (найденному по ε) можно указать номер K такой, что как только $k > K$, так сейчас же

$$\|\psi_{k-1}(x) - \varphi(x)\| < \delta, \quad \text{для всех } x \in I.$$

Но тогда при $k > K$ будет

$$\|F(x, \psi_{k-1}(x)) - F(x, \varphi(x))\| < \varepsilon, \quad \text{для всех } x \in I.$$

Последнее означает, что $F(x, \psi_{k-1}(x)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F(x, \varphi(x))$, $x \in I$. Перейдем в соотношении (7) к пределу при $k \rightarrow +\infty$. Получим:

$$\varphi(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \varphi(x)) dx, \quad x \in I. \quad (8)$$

Из (8) следует:

$$\begin{cases} 1) \varphi'(x) = F(x, \varphi(x)), & x \in I; \\ 2) \varphi(x_0) = Y_0. \end{cases}$$

А это означает, что $Y = \varphi(x)$, $x \in I$ – решение задачи (1) – (2).

3) Покажем теперь, что это решение – единственное. Рассуждаем от противного, а именно предполагаем, что задача (1) – (2) имеет и другие решения. Возьмем тогда два любых решения задачи (1) – (2):

$$Y = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in I_{\tilde{\delta}}; \quad Y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x), \quad x \in I_{\tilde{\delta}}.$$

По условию $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ – локально $\Rightarrow$ точке (x_0, Y_0) отвечает окрестность $U(x_0, Y_0) \subset (D)$ такая, что $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U(x_0, Y_0))$. У нас функции $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\tilde{\varphi}}(x)$ – непрерывные. Значит, существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in I_{\delta}$ будет: точка $(x, \tilde{\varphi}(x))$ и точка $(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) \in U(x_0, Y_0)$. Так как $Y = \tilde{\varphi}(x)$ и $Y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$ – решения задачи (1) – (2), то

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'(x) &= F(x, \tilde{\varphi}(x)), & x \in I_{\delta}, \\ \tilde{\tilde{\varphi}}'(x) &= F(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)), & x \in I_{\delta}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем оба этих соотношения по отрезку $[x_0, x]$, $x \in I_{\delta}$. Получим

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x_0) + \int_{x_0}^x F(x, \tilde{\varphi}(x)) dx, \quad \tilde{\tilde{\varphi}}(x) = \tilde{\tilde{\varphi}}(x_0) + \int_{x_0}^x F(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) dx, \quad x \in I_{\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x) = \int_{x_0}^x (F(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) - F(x, \tilde{\varphi}(x))) dx, \quad x \in I_{\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x)\| \leq \left| \int_{x_0}^x \|F(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) - F(x, \tilde{\varphi}(x))\| dx \right| \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x)\| dx \right|$$

(здесь L – постоянная Липшица). Обозначим $\|\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x)\| = f(x)$, $x \in I_{\delta}$. Будем иметь:

$$1) f(x) \in C(I_{\delta});$$

$$2) f(x) \text{ удовлетворяет неравенству: } 0 \leq f(x) \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right|, \quad x \in I_\delta.$$

Но тогда по лемме Гронуола

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in I_\delta \Rightarrow \tilde{\tilde{\varphi}}(x) = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in I_\delta. \quad \blacktriangleleft$$

Следствие. Пусть $F(x, Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} \in C(D)$. Тогда для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ задача (1) – (2) имеет единственное решение.

Замечание. Так как ряд (3) на отрезке I мажорируется числовым, положительным, сходящимся рядом (5), то, полагая $\varphi(x) \approx \psi_k(x)$, $x \in I$, всегда можно оценить погрешность этого приближения. Именно: норма упомянутой погрешности не превосходит остатка после k -го члена мажорантного ряда (5).

§4. Общее решение и общий интеграл нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Пусть имеется нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

Предполагается, что 1) $F(x, Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$, и 2) $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ – локально.

Определение. Семейство вектор-функций

$$Y = \varphi(x, C), \text{ где } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

– произвольный постоянный вектор, называется *общим решением* системы (1) в области (D) , если, во-первых, для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ векторное уравнение

$$Y_0 = \varphi(x_0, C) \quad (3)$$

имеет одно единственное решение $C = C_0 = \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \\ \dots \\ C_n^0 \end{pmatrix}$, и если, во-вторых, вектор-

функция

$$Y = \Phi(x, C_0), \quad x \in I_\delta \quad [I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \quad (4)$$

является решением системы (1), хотя бы при достаточно малом δ .

Ясно, что это решение (4) удовлетворяет начальному условию: $Y|_{x=x_0} = Y_0$.

Определение. Пусть $U(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \dots \\ u_n(x, Y) \end{pmatrix} \in C^1(D)$, и пусть $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$ – про-

извольный постоянный вектор. Соотношение:

$$U(x, Y) = C \quad (5)$$

называется *общим интегралом* системы (1) в (D) , если, во-первых, для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ векторное уравнение

$$U(x, Y) = U(x_0, Y_0) \quad (6)$$

определяет единственную дифференцируемую вектор-функцию

$$Y = \Phi(x), \quad x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad (7)$$

такую, что: $\Phi(x_0) = Y_0$; $U(x, \Phi(x)) = U(x_0, Y_0)$, $x \in I_\delta$, и если, во-вторых, эта вектор-функция $Y = \Phi(x)$, $x \in I_\delta$, хотя бы при достаточно малом δ является решением системы (1).

2°. Необходимый признак общего интеграла.

Теорема. Пусть $U(x, Y) = C$ – общий интеграл системы (1) в области (D) . Тогда для любого решения $Y = \Phi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ системы (1), график которого лежит в (D) , справедливо тождество:

$$U(x, \Phi(x)) \equiv \text{const}, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

► Пусть $Y = \tilde{\Phi}(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ – произвольное решение системы (1), график которого лежит в (D) . У нас $U(x, Y) \in C^1(D)$, $\tilde{\Phi}(x) \in C^1(\langle a, b \rangle) \Rightarrow U(x, \tilde{\Phi}(x)) \in C^1(\langle a, b \rangle)$.

Мы покажем, что $U(x, \Phi(x)) \equiv \text{const}$, $x \in \langle a, b \rangle$, если установим, что

$$\frac{d}{dx} U(x, \Phi(x)) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Для этого берем произвольную точку $x_0 \in \langle a, b \rangle$ и находим $\tilde{\Phi}(x_0) = Y_0$. Ясно, что точка $(x_0, Y_0) \in (D)$. Рассмотрим теперь векторное уравнение

$$U(x, Y) = U(x_0, Y_0).$$

По определению общего интеграла системы (1) это уравнение определяет единственную дифференцируемую вектор-функцию $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, такую, что $\varphi(x_0) = Y_0$, и которая при достаточно малом δ является решением системы (1).

Ясно, что для $x \in I_\delta$ будет

$$U(x, \varphi(x)) \equiv U(x_0, Y_0). \quad (8)$$

Имеем:

1) $Y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, – решение системы (1), такое, что $\tilde{\varphi}(x_0) = Y_0$;

2) $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, – решение системы (1), такое, что $\varphi(x_0) = Y_0$.

Видим, что оба эти решения удовлетворяют одному и тому же начальному условию:

$$Y|_{x=x_0} = Y_0, \quad (x_0, Y_0) \in (D).$$

Так как (D) – область единственности системы (1), то $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, по крайней мере, при достаточно малом δ . А тогда, в силу (8),

$$U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv U(x_0, Y_0), \quad x \in I_\delta \Rightarrow \frac{d}{dx} U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv 0, \quad x \in I_\delta \Rightarrow \text{в частности,}$$

$$\left. \frac{d}{dx} U(x, \tilde{\varphi}(x)) \right|_{x=x_0} = 0.$$

У нас точка x_0 – любая из $\langle a, b \rangle$ ($\langle a, b \rangle$ – промежуток, на котором определено решение $Y = \tilde{\varphi}(x)$ системы (1)). Поэтому получаем

$$\frac{d}{dx} U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle. \quad \blacktriangleleft$$

Следствие. Если $U(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \vdots \\ u_n(x, Y) \end{pmatrix} = C$ – общий интеграл системы (1) в

(D) , то для любого решения $Y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, системы (1) справедливы тождества

$$u_i(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}, \quad x \in \langle a, b \rangle \quad (i = \overline{1, n}).$$

Определение. Скалярная функция $u(x, Y) \in C^1(D)$ называется интегралом системы (1) в (D) , если она тождественно обращается в постоянную на любом решении системы (1), график которого лежит в (D) .

Замечание. Любая скалярная функция $u(x, Y) \equiv \text{const}$ в (D) есть интеграл системы (1) в (D) (это – “тривиальные интегралы”; их мы рассматривать не будем).

3°. Критерий интеграла.

Теорема. Скалярная функция $u(x, Y) \in C^1(D)$ является интегралом системы (1) в (D) тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\frac{\partial u(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0 \quad \text{в } (D). \quad (9)$$

(Здесь $\frac{\partial u(x, Y)}{\partial Y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n} \right)$ – матрица-строка, $F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, Y) \\ f_2(x, Y) \\ \dots \\ f_n(x, Y) \end{pmatrix}$ –

матрица-столбец, так что $\frac{\partial u(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(x, Y)}{\partial y_j} \cdot f_j(x, Y)$).

► *Необходимость.* Дано: $u(x, Y) \in C^1(D)$ является интегралом системы (1) в (D) . Требуется доказать, что в (D) имеет место тождество (9).

Возьмем любую точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ и рассмотрим решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ системы (1), удовлетворяющее условию $Y|_{x=x_0} = Y_0$ ($\Rightarrow \varphi(x_0) = Y_0$). Станем рассматривать функцию $u(x, Y)$ на этом решении.

По определению интеграла системы (1), будем иметь:

$$u(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}, \quad x \in I_\delta. \quad (10)$$

Левая часть тождества (10) дифференцируема по x на I_δ , так как $u(x, Y) \in C^1(D)$, $\varphi(x) \in C^1(I_\delta)$. Дифференцируя по x тождество (10), получим

$$\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot \varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in I_\delta.$$

Но $\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x))$, $x \in I_\delta$ (так как $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, – решение системы (1)). Поэтому будем иметь

$$\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot F(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in I_\delta.$$

Положим в последнем равенстве $x = x_0$ (тогда $\varphi(x_0) = Y_0$). Получим

$$\frac{\partial u(x_0, Y_0)}{\partial x} + \frac{\partial u(x_0, Y_0)}{\partial Y} \cdot F(x_0, Y_0) = 0.$$

У нас точка (x_0, Y_0) – любая, принадлежащая (D) . Поэтому $\frac{\partial u(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0$ в (D) . Необходимость доказана.

Достаточность. Имеет место тождество

$$\frac{\partial u(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0 \quad \text{в } (D). \quad (9)$$

Требуется доказать, что $u(x, Y)$ – интеграл системы (1) в (D) .

Берем произвольное решение системы (1) в (D)

$$Y = \varphi(x), \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Так как левая часть (9) тождественно равна нулю в (D) , то она равна нулю и на взятом решении, т.е.

$$\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot F(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Так как $Y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, – решение системы (1) в (D) , то $F(x, \varphi(x)) \equiv \varphi'(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot \varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{du(x, \varphi(x))}{dx} \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle \Rightarrow u(x, \varphi(x)) \equiv C, \quad x \in \langle a, b \rangle. \end{aligned}$$

Последнее означает, что $u(x, Y)$ – интеграл системы (1) в (D) .

Замечание. Допустим, что для системы (1) удалось построить в (D) n интегралов. Тогда можно построить вектор-функцию

$$U(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \vdots \\ u_n(x, Y) \end{pmatrix}$$

и образовать соотношение $U(x, Y) = C$.

Вопрос: Будет ли соотношение $U(x, Y) = C$ общим интегралом системы (1) в (D) ?

Ответ: Не всегда.

4°. Понятие независимости интегралов. Пусть $u_1(x, Y)$, $u_2(x, Y)$, ..., $u_k(x, Y)$, $k > 1$ – интегралы системы (1) в (D) . Составим векторный интеграл

$$U^{[k]}(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \vdots \\ u_k(x, Y) \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу Якоби для этого векторного интеграла

$$\frac{\partial U^{[k]}}{\partial(x, Y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x} & \frac{\partial u_k}{\partial y_1} & \frac{\partial u_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Определение. Интегралы $u_1(x, Y), u_2(x, Y), \dots, u_k(x, Y)$ системы (1) в (D) называются независимыми, если для любой точки $(x, Y) \in (D)$

$$\text{rang} \frac{\partial U^{[k]}}{\partial (x, Y)} = k.$$

Справедливо утверждение:

Пусть функции $u_1(x, Y), u_2(x, Y), \dots, u_k(x, Y)$ являются интегралами системы (1) в (D) . Тогда $\text{rang} \frac{\partial U^{[k]}}{\partial (x, Y)} = \text{rang} \frac{\partial U^{[k]}}{\partial Y}, (x, Y) \in (D)$, где

$$\frac{\partial U^{[k]}}{\partial Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k}{\partial y_1} & \frac{\partial u_k}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

► По условию функции $u_i(x, Y)$ ($i = \overline{1, k}$) являются интегралами системы (1) в (D) . Но тогда справедливы тождества:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0 \quad \text{в } (D) \quad (i = \overline{1, k}) \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial x} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial y_j} \cdot f_j(x, Y), \quad \text{для любой точки } (x, Y) \in (D) \quad (i = \overline{1, k}). \end{aligned}$$

Возьмем произвольную точку $(x, Y) \in (D)$ и закрепим ее. Предыдущее соотношение означает, что в закреплённой точке первый столбец матрицы $\frac{\partial U^{[k]}}{\partial (x, Y)}$ является линейной комбинацией остальных ее столбцов (числа $-f_1(x, Y), -f_2(x, Y), \dots, -f_n(x, Y)$ выступают в качестве коэффициентов). Из этого и следует справедливость утверждения. ◀

Следствие. Система (1) имеет в области (D) не более чем n независимых интегралов.

► Это следует из того, что

$$\text{rang} \frac{\partial \mathbf{U}^{[k]}}{\partial \mathbf{Y}} = \text{rang} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k}{\partial y_1} & \frac{\partial u_k}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}}_{\substack{k \text{ строк;} \\ n \text{ столбцов}}} \leq n, \text{ при любом } k. \blacktriangleleft$$

5°. Достаточный признак общего интеграла.

Теорема. Пусть $u_1(x, \mathbf{Y}), u_2(x, \mathbf{Y}), \dots, u_n(x, \mathbf{Y})$ – интегралы системы (1) в

(D). Пусть $\mathbf{U}(x, \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} u_1(x, \mathbf{Y}) \\ u_2(x, \mathbf{Y}) \\ \vdots \\ u_n(x, \mathbf{Y}) \end{pmatrix}$. Тогда если интегралы $u_1(x, \mathbf{Y}), u_2(x, \mathbf{Y}), \dots,$

$u_n(x, \mathbf{Y})$ – независимые в (D), то соотношение

$$\mathbf{U}(x, \mathbf{Y}) = \mathbf{C} \quad (11)$$

есть общий интеграл системы (1) в (D).

► Покажем, что соотношение (11) удовлетворяет определению общего интеграла. Для этого берем произвольную точку $(x_0, \mathbf{Y}_0) \in (D)$ и рассматриваем векторное уравнение

$$\mathbf{U}(x, \mathbf{Y}) = \mathbf{U}(x_0, \mathbf{Y}_0). \quad (12)$$

Перепишем (12) в виде

$$\underbrace{\mathbf{U}(x, \mathbf{Y}) - \mathbf{U}(x_0, \mathbf{Y}_0)}_{=\mathbf{G}(x, \mathbf{Y}) \text{ (обозначение)}} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Имеем:

1) $\mathbf{G}(x, \mathbf{Y}) \in C^1(D)$ (так как $\mathbf{U}(x, \mathbf{Y}) \in C^1(D)$).

2) $\mathbf{G}(x_0, \mathbf{Y}_0) = \mathbf{0}$;

3) $\det \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Y}} \Big|_{(x_0, \mathbf{Y}_0)} = \det \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Y}} \Big|_{(x_0, \mathbf{Y}_0)} \neq 0$ (так как интегралы $u_i(x, \mathbf{Y}), i = \overline{1, n}$ – не-

зависимые в (D)).

Видим, что выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости векторного уравнения (13) (см. теорию неявных функций). По этой теореме векторное уравнение (13) определяет единственную дифференцируемую вектор-функцию

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\varphi}(x), \quad x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

такую, что $\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \mathbf{Y}_0$.

Покажем, что вектор-функция $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\varphi}(x), x \in I_\delta$, является решением системы (1), по крайней мере, при достаточно малом δ ($\delta > 0$).

Так как вектор-функция $Y = \Phi(x)$, $x \in I_\delta$, – неявная, дифференцируемая функция, определяемая уравнением (13), то она обращает (13) в тождество относительно x на интервале I_δ , т.е. $U(x, \Phi(x)) - U(x_0, Y_0) \equiv 0$, $x \in I_\delta$. Дифференцируя по x это тождество, получим

$$\frac{\partial U(x, \Phi(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x, \Phi(x))}{\partial Y} \cdot \Phi'(x) \equiv 0, \quad x \in I_\delta. \quad (14)$$

У нас $U(x, Y)$ – векторный интеграл системы в (D) . Значит, каждая его компонента $u_i(x, Y)$ ($i = \overline{1, n}$) удовлетворяет в (D) тождеству

$$\frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0.$$

Эти n скалярных тождеств можно переписать в виде одного векторного тождества

$$\frac{\partial U(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0 \quad \text{в } (D).$$

Так как это тождество имеет место всюду в (D) , то, в частности, оно выполняется на линии $Y = \Phi(x)$, $x \in I_\delta$. Поэтому

$$\frac{\partial U(x, \Phi(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x, \Phi(x))}{\partial Y} \cdot F(x, \Phi(x)) \equiv 0, \quad x \in I_\delta. \quad (15)$$

Возьмем любое $x \in I_\delta$ и закрепим его. Рассмотрим при этом x линейную систему

$$\frac{\partial U(x, \Phi(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x, \Phi(x))}{\partial Y} \cdot Z \equiv 0, \quad \text{где } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Определителем этой системы является $\det \frac{\partial U(x, \Phi(x))}{\partial Y}$. Он отличен от нуля в силу независимости интегралов $u_1(x, Y)$, $u_2(x, Y)$, ..., $u_n(x, Y)$. Следовательно, система (16) имеет единственное решение. Но, как следует из (14) и (15), эта система имеет своими решениями векторы

$$Z = \Phi'(x) \quad \text{и} \quad Z = F(x, \Phi(x)).$$

Так как система (16) имеет единственное решение, то получаем, что для взятого $x \in I_\delta$

$$\Phi'(x) = F(x, \Phi(x)).$$

У нас x – любое, принадлежащее I_δ . Поэтому будем иметь $\Phi'(x) \equiv F(x, \Phi(x))$, $x \in I_\delta$. Последнее означает, что $Y = \Phi(x)$, $x \in I_\delta$ – решение системы (1).

Таким образом, показано, что соотношение (11) удовлетворяет определению общего интеграла системы (1) в (D) .

Замечание 1. Чтобы составить общий интеграл системы (1) в (D) , нужно найти n независимых интегралов этой системы.

Замечание 2. Пусть скалярная функция $u(x, Y) \in C^1(D)$ – интеграл системы (1) в (D) , отличный от тривиального (т.е. $u(x, Y) \neq \text{const}$ в (D)). Соотношение $u(x, Y) = C$ называется *первым интегралом* системы (1) в (D) . Отметим, что

если $U(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \vdots \\ u_n(x, Y) \end{pmatrix} = C$ – общий интеграл системы (1) в (D) , то

$u_i(x, Y) = C_i$ ($i = \overline{1, n}$) – первые интегралы системы (1) в (D) .

§5. Методы интегрирования нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Метод исключения. Метод исключения является основным методом интегрирования нормальной системы. Он сводит задачу интегрирования данной системы к интегрированию одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых представляет собой уравнение относительно одной неизвестной функции. Сущность метода состоит в следующем.

В системе

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1)$$

берем какое-нибудь уравнение, например, первое, и дифференцируем его по x . Получим

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2' + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot y_n'.$$

Подставляя сюда значения $y_1', y_2', \dots, y_n'$ из системы (1), будем иметь

$$\begin{aligned} y_1'' = & \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial y_1} \cdot f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) + \\ & + \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial y_2} \cdot f_2(\dots) + \dots + \frac{\partial f_1(\dots)}{\partial y_n} \cdot f_n(\dots), \end{aligned}$$

ИЛИ

$$y_1'' = f_{11}(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (2)$$

Полученное соотношение (2) тоже дифференцируем по x и подобным же образом, т.е. используя уравнения системы (1), приходим к уравнению

$$y_1''' = f_{12}(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (3)$$

После $(n-1)$ таких шагов мы приходим к уравнению

$$y_1^{(n)} = f_{1,n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь систему

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots y_n), \\ y_1'' = f_{11}(x, y_1, y_2, \dots y_n), \\ y_1''' = f_{12}(x, y_1, y_2, \dots y_n), \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} = f_{1,n-2}(x, y_1, y_2, \dots y_n), \\ y_1^{(n)} = f_{1,n-1}(x, y_1, y_2, \dots y_n). \end{array} \right. \quad (5)$$

Допустим, что из первых $(n-1)$ уравнений системы (5) удастся найти $y_2, y_3, \dots, y_n$, т.е. выразить $y_2, y_3, \dots, y_n$ через $x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$

$$\begin{cases} y_2 = \Phi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \Phi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ \dots \\ y_n = \Phi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \quad (6)$$

Подставляя эти значения для $y_2, y_3, \dots, y_n$ в последнее уравнение системы (5), будем иметь:

$$y_1^{(n)} = f(x, y_1, y_1', y_2'', \dots, y_1^{(n-1)}). \quad (7)$$

Получили, таким образом, одно дифференциальное уравнение n -го порядка относительно одной неизвестной функции. Интегрируя это уравнение, получим

$$y_1 = \Phi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (8)$$

(предполагается, что мы умеем находить общее решение уравнения (7)).

Теперь, дифференцируя полученную функцию (8) последовательно $(n-1)$ раз и подставляя значения $y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ в (6), получим

$$y_2 = \Phi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

$$y_3 = \Phi_3(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

• • • • •

$$y_n = \Phi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

которые вместе с ранее найденным $y_1 (= \Phi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n))$ составляют общее решение системы (1).

Замечание. В рассматриваемом случае процесс исключения можно вести и в ином порядке. Так, например, можно выражать $y_2, y_3, \dots, y_n$ через $x, y_1, y_1'', y_1''', \dots, y_1^{(n)}$ из последних $(n-1)$ уравнений системы (5) и подставить в первое.

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3x - 2y_1 + 3y_2 + 4y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = 1 - 7x - 6y_1 + 7y_2 + 6y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = x + y_1 - y_2 + y_3. \end{cases} \quad (\tilde{1})$$

► Продифференцируем по x первое уравнение из системы $(\tilde{1})$:

$$y_1'' = -3 - 2y_1' + 3y_2' + 4y_3'.$$

Подставляя здесь вместо y_1', y_2', y_3' их выражения из $(\tilde{1})$, получим

$$y_1'' = -11x - 10y_1 + 11y_2 + 14y_3. \quad (\tilde{2})$$

Полученное уравнение $(\tilde{2})$ дифференцируем по x :

$$y_1''' = -11 - 10y_1' + 11y_2' + 14y_3'. \quad (\tilde{3})$$

И здесь вместо y_1', y_2', y_3' подставляем их выражения из $(\tilde{1})$. Получим

$$y_1''' = -33x - 32y_1 + 33y_2 + 40y_3. \quad (\tilde{4})$$

Рассматриваем теперь систему

$$\begin{cases} y_1' = -3x - 2y_1 + 3y_2 + 4y_3, \\ y_1'' = -11x - 10y_1 + 11y_2 + 14y_3, \\ y_1''' = -33x - 32y_1 + 33y_2 + 40y_3. \end{cases} \quad (\tilde{5})$$

Из первых двух уравнений $(\tilde{5})$ выражаем y_2 и y_3 через x, y_1, y_1', y_1'' :

$$\begin{cases} y_2 = 2y_1'' - 7y_1' + 6y_1 + x, \\ y_3 = \frac{1}{2}(-3y_1'' + 11y_1' - 8y_1). \end{cases} \quad (\tilde{6})$$

Подставляем найденные значения для y_2 и y_3 в последнее уравнение $(\tilde{5})$. Получим

$$y_1''' - 6y_1'' + 11y_1' - 6y_1 = 0. \quad (\tilde{7})$$

$(\tilde{7})$ – линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Следовательно,

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}. \quad (\tilde{8})$$

Теперь, дифференцируя $(\tilde{8})$ два раза и подставляя значения y_1, y_1', y_1'' в $(\tilde{6})$, получаем

$$y_2 = x + C_1 e^x + 3C_3 e^{3x}, \quad y_3 = C_2 e^{2x} - C_3 e^{3x}.$$

Совокупность функций

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}, \\ y_2 &= x + C_1 e^x + 3C_3 e^{3x}, \\ y_3 &= C_2 e^{2x} - C_3 e^{3x} \end{aligned} \right\}$$

– общее решение системы $(\tilde{1})$. ◀

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases} \quad (\tilde{1}_0)$$

► Дифференцируя по x первое уравнение системы $(\tilde{1}_0)$, получим

$$y_1'' = y_2' + y_3'.$$

Подставив здесь вместо y_2', y_3' их выражения из $(\tilde{1}_0)$, будем иметь

$$y_1'' = 2y_1 + (y_2 + y_3). \quad (\tilde{2}_0)$$

Замечаем, что уравнения

$$\begin{aligned} y_1' &= (y_2 + y_3), \\ y_1'' &= 2y_1 + (y_2 + y_3) \end{aligned}$$

содержат y_2 и y_3 “одинаковым образом” и, следовательно, из этих уравнений они могут быть исключены сразу. В результате мы получим уравнение второго порядка для y_1 :

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0, \quad (\tilde{7}_0)$$

и в дальнейшем дифференцировании уравнения $(\tilde{2}_0)$ надобности нет. Интегрируя уравнение $(\tilde{7}_0)$, получим

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Найдем теперь y_3 из первого уравнения системы $(\tilde{1}_0)$: $y_3 = y_1' - y_2$ и подставим во второе уравнение этой системы. Будем иметь:

$$y_2' = y_1 + y_1' - y_2 \Rightarrow y_2' = 3C_2 e^{2x} - y_2 \Rightarrow y_2' + y_2 = 3C_2 e^{2x}.$$

Мы получили уравнение первого порядка для y_2 . Решая его, находим: $y_2 = C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}$. Остается найти y_3 , для чего можно использовать, например, второе уравнение системы ($\tilde{1}_0$):

$$y_3 = y_2' - y_1 = 2C_2e^{2x} - C_3e^{-x} - C_1e^{-x} - C_2e^{2x} \Rightarrow y_3 = C_2e^{2x} - (C_1 + C_3)e^{-x}. \blacktriangleleft$$

Таким образом, в рассматриваемом случае нам пришлось интегрировать одно уравнение второго порядка и одно первого порядка. И вообще, следует отметить, что интегрирование нормальной системы порядка n методом исключения может свестись к интегрированию нескольких дифференциальных уравнений, сумма порядков которых равна n .

Рассмотрим случай, когда метод исключения приводит к интегрированию n уравнений первого порядка.

Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \\ \frac{dy_3}{dx} = f_3(x, y_1, y_2, y_3), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (\tilde{I})$$

Интегрируя первое уравнение системы $(\tilde{1})$, найдем

$$y_1 = \Phi_1(x, C_1).$$

Подставляя это выражение для y_1 во второе уравнение системы (1), получим уравнение первого порядка для y_2 :

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, \Phi_1(x, C_1), y_2).$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$y_2 = \Phi_2(x, C_1, C_2).$$

Подставляя в третье уравнение системы $(\tilde{1})$ вместо y_1 и y_2 соответственно $\Phi_1(x, C_1)$ и $\Phi_2(x, C_1, C_2)$, получим уравнение первого порядка для y_3 :

$$\frac{dy_3}{dx} = f_3(x, \Phi_1(x, C_1), \Phi_2(x, C_1, C_2), y_3).$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$y_3 = \Phi_3(x, C_1, C_2, C_3), \text{ и т. д.}$$

Наконец, приходим к уравнению первого порядка для y_n :

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, \Phi_1(x, C_1), \Phi_2(x, C_1, C_2), \dots, \Phi_{n-1}(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), y_n).$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$y_n = \Phi_n(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}, C_n).$$

Совокупность функций $\Phi_1(x, C_1), \Phi_2(x, C_1, C_2), \dots, \Phi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ является общим решением системы (1).

2°. Симметрическая форма нормальной системы. Нахождение интегрируемых комбинаций. Нормальную систему (1) можно записать в виде равенства отношений:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1}. \quad (9)$$

Равенство отношений (9) называется симметрической формой нормальной системы (1). Такое название объясняется тем, что в (9) все переменные $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ равноправны: любую из них можно выбрать в качестве независимой. Последнее обстоятельство бывает иногда очень полезным в теории и практике интегрирования систем.

Мы видели, что задача построения общего решения нормальной системы порядка n равносильна нахождению n ее независимых интегралов. Общего способа построения интегралов не существует, но в отдельных случаях они могут быть сравнительно просто найдены. Для нахождения интегралов системы (9) либо берут пары отношений, допускающих разделение переменных, либо используют производные пропорции:

$$\frac{dx}{1} = \frac{\omega_0 dx + \omega_1 dy_1 + \omega_2 dy_2 + \dots + \omega_n dy_n}{\omega_0 + \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \dots + \omega_n f_n}. \quad (10)$$

Здесь $\omega_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \omega_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, \omega_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ – произвольные функции, и их выбирают так, чтобы числитель правой части был дифференциалом знаменателя, либо числитель был полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, а знаменатель был равен нулю, т.е. чтобы одновременно выполнялись два условия:

1. $\omega_0 + \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \dots + \omega_n f_n = 0$;
2. $\omega_0 dx + \omega_1 dy_1 + \omega_2 dy_2 + \dots + \omega_n dy_n = du(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Если эти условия оказываются выполненными, то из (10) получается $du = 0$, откуда видно, что функция $u(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ является интегралом данной системы.

Пример 3. Найти интегралы системы

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2 + 1}} \quad (11)$$

► (11) – система двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций, записанная в симметрическом виде. Области, в которых

будем искать интегралы системы (11) – открытые координатные октанты $\mathbf{R}^3$ с введенной системой координат $Oxyz$.

Из первого равенства (11) $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$ находим $y = C_1 x$, или $\frac{y}{x} = C_1$. Соотно-

шение $\frac{y}{x} = C_1$ является первым интегралом системы (11), а функция $u_1(x, y) = \frac{y}{x}$ – интегралом системы (11).

Из (11), воспользовавшись свойством равных отношений, находим:

$$\begin{aligned} \frac{ydx + xdy}{2xyz} &= \frac{dz}{xy\sqrt{z^2 + 1}} \Rightarrow \frac{1}{2}d(x \cdot y) = d\left(\sqrt{z^2 + 1}\right) \Rightarrow d\left(\frac{xy}{2} - \sqrt{z^2 + 1}\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_2(x, y, z) = \frac{xy}{2} - \sqrt{z^2 + 1} = C_2. \end{aligned}$$

Это еще один первый интеграл системы (11).

Имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{x}{2} \\ 0 & -\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \end{vmatrix} = -\frac{z}{x\sqrt{1+z^2}} \neq 0$$

во всех точках каждой из восьми областей, в которых рассматривается система (11). Значит, интегралы $u_1 = \frac{y}{x}$, $u_2 = \frac{xy}{2} - \sqrt{1+z^2}$ – независимые в каждом из восьми октантов системы координат $Oxyz$. Следовательно,

$$U(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ \frac{xy}{2} - \sqrt{1+z^2} \end{pmatrix} = C \quad \left(= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right)$$

– общий интеграл системы (11). ◀

Пример 4. Найти интегралы системы

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{dt}{t}. \quad (12)$$

► (12) – система трех дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций, записанная в симметрическом виде. Для отыскания интегралов системы (12) будем пользоваться свойством равных отношений.

Имеем, например,

$$\frac{dx - dy}{y - x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{d(x - y)}{x - y} + \frac{dt}{t} = 0 \Rightarrow (x - y)t = C_1. \quad (13)$$

Соотношение (13) является первым интегралом системы (12), а функция $u_1 = (x - y)t$ – интегралом системы (12).

Имеем, далее, из (12)

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{x+y+z}{t^2} = C_2. \quad (14)$$

Соотношение (14) является еще одним первым интегралом системы (12), а функция $u_2 = \frac{x+y+z}{t^2}$ – интегралом системы (12).

Из (12) находим еще

$$\frac{dx-dz}{z-x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{d(x-z)}{x-z} + \frac{dt}{t} = 0 \Rightarrow (x-z)t = C_3. \quad (15)$$

Соотношение (15) является первым интегралом системы (12), а функция $u_3 = (x-z)t$ – интегралом системы (12).

Имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -t & 0 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} \\ t & 0 & -t \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad (t \neq 0)$$

$\Rightarrow$ интегралы $u_1(x, y, z, t)$, $u_2(x, y, z, t)$, $u_3(x, y, z, t)$ – независимые всюду, где определена система (12). $\blacktriangleleft$

§6. Интегрирование линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

1°. Общий вид линейного уравнения с частными производными первого порядка такой:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1')$$

Здесь: $x_1, x_2, \dots, x_n$ – независимые переменные, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – неизвестная функция, $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = \overline{1, n}$), $b(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – известные, заранее заданные функции. (Неизвестная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и все ее частные производные входят в уравнение (1') линейно.)

Общий вид квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка такой:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (2)$$

(В уравнение входят линейно лишь частные производные неизвестной функции; сама же неизвестная функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ входит в (2) через посредство $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ ($i = \overline{1, n}$) и $b(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ любым образом).

I. Рассмотрим сначала уравнение вида

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (1)$$

Предполагается, что $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C(D)$, $i = \overline{1, n}$, и что в (D) $a(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Это – линейное *однородное* уравнение первого порядка с частными производными.

Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (3)$$

(3) называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей уравнению (1). (3) – система $(n-1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предполагаем, что (3) задана в области $(D) \subset \mathbf{R}^n$ и что (D) – область единственности для системы (3).

Теорема 1. Пусть $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1$ – первый интеграл системы (3) в (D) . Тогда функция $u = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – решение уравнения (1) в (D) .

► Возьмем в области (D) любую точку $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Через нее проходит интегральная кривая системы (3). Вычислим du вдоль этой интегральной кривой. Так как $u = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \underbrace{C_1}_{\text{const}}$ вдоль интегральной кривой системы (3),

то в точках этой кривой

$$du = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} dx_n = 0. \quad (4)$$

(В частности, (4) выполняется во взятой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а она – любая из (D) .)

Из (3) находим, например,

$$dx_2 = \frac{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1, \quad \dots, \quad dx_n = \frac{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1.$$

Подставив эти выражения для $dx_2, \dots, dx_n$ в (4), получим в каждой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (D)$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ существует зависимость $\tilde{\psi} = \psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$. $\blacktriangleleft$

Замечание. Функцию $u = \psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, где ψ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, называют общим решением уравнения (1).

II. Рассмотрим теперь уравнение вида:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (2)$$

Предполагается, что функции $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ ($i = \overline{1, n}$) и $b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \in C^1(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$; $\mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ в (D) . В (2) $x_1, x_2, \dots, x_n$ – независимые переменные, $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – неизвестная функция.

Введем в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$\begin{aligned} & a_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \\ & + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_n} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = 0. \end{aligned} \quad (\tilde{2})$$

В $(\tilde{2})$ $x_1, x_2, \dots, x_n, u$ – независимые переменные, $v(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ – неизвестная функция.

Видим, что $(\tilde{2})$ – линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными относительно неизвестной функции $v(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$. (Уравнение такого вида было рассмотрено в пункте I.)

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению $(\tilde{2})$, будет такой:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n, u)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \dots, x_n, u)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n, u)} = \frac{du}{b(x_1, \dots, x_n, u)}. \quad (\tilde{3})$$

$(\tilde{3})$ – система n обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагается, что $(\tilde{3})$ задана в области $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ и что (D) – область единственности для $(\tilde{3})$.

Пусть $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_1$ – первый интеграл системы (3) в (D) . Тогда (см. теорему 1) функция

$$v = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$$

является решением вспомогательного уравнения (2). Следовательно,

$$\begin{aligned} & a_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \\ & + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_n} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = 0 \quad \text{в } (D). \end{aligned} \quad (4)$$

Имеет место

Теорема 3. Неявная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемая соотношением

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0,$$

является решением уравнения (2).

► Пусть $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – неявная функция, определяемая соотношением $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$. Тогда, как известно,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = - \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = - \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}}; \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = - \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}}.$$

Подставив эти выражения для $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ в уравнение (2), получим:

$$\begin{aligned} & -a_1(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}} - a_2(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}} - \dots - \\ & - a_n(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}} - b(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}} = \\ & = - \frac{1}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}} \cdot \left[\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u}}_{= 0 \text{ в } (D), \text{ в силу (4)}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Видим, что неявная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемая соотношением $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$, действительно является решением уравнения (2). ◀

Пусть

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_1,$$

$$\psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_2,$$

$$\dots$$

$$\psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_n$$

– независимые первые интегралы системы (3̃). Тогда (см. теорему 2) функция

$$v = \psi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)),$$

где ψ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, является решением вспомогательного уравнения (2̃).

Имеет место

Теорема 4. Неявная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемая соотношением

$$\psi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)) = 0, \quad (5)$$

является решением уравнения (2).

► Пусть $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – неявная функция, определяемая соотношением

$$(5) \quad \psi(\psi_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0. \quad \text{Найдем } \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Чтобы найти $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, продифференцируем по x_1 обе части (5̃). Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial \psi_1} \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_n} \cdot \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_n}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = & - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_n} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial u} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_n} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial u}} = - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_n}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}}.$$

Подставив эти выражения для $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ в уравнение (2), получим:

$$\begin{aligned}
& -a_1(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}} - a_2(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}} - \dots - \\
& -a_n(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_n}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}} - b(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}} = \\
& = -\frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \left[\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} + b(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}}_{=0 \text{ в } (D), j = \overline{1, n}} \right] = 0.
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u} = 0 \text{ для любого } j = \overline{1, n}, \text{ так}$$

как $v = \psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ – решения уравнения $(\tilde{2})$, $j = \overline{1, n}$.

Видим, что неявная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемая соотношением $(\tilde{5})$, действительно является решением уравнения (2). ◀

Функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемую соотношением $(\tilde{5})$, в котором ψ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, называют общим решением уравнения (2).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$(x - z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (y - z) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

► $u = u(x, y, z)$ – неизвестная функция. Заданное уравнение – линейное однородное. Строим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую заданному уравнению:

$$\frac{dx}{x - z} = \frac{dy}{y - z} = \frac{dz}{2z}.$$

Пользуясь свойством равных отношений, найдем интегралы этой системы

$$1) \frac{dx}{x - z} = \frac{dy}{y - z} = \frac{2dz}{4z} \Rightarrow \frac{d(x + y + 2z)}{x + y + 2z} = \frac{dz}{2z} \Rightarrow \frac{(x + y + 2z)^2}{z} = C_1 \text{ – это}$$

первый интеграл системы.

2) $\frac{dx}{x-z} = \frac{d(-y)}{z-y} = \frac{dz}{2z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{2z} \Rightarrow \frac{(x-y)^2}{z} = C_2$ – это еще один первый интеграл системы.

Общее решение заданного уравнения будет таким:

$$u = \psi \left(\frac{(x+y+2z)^2}{z}, \frac{(x-y)^2}{z} \right).$$

Здесь ψ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. ◀

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z. \quad (\tilde{1})$$

► $z = z(x, y)$ – неизвестная функция. Заданное уравнение $(\tilde{1})$ – квазилинейное. Вводим в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$yz \frac{\partial v}{\partial x} - xz \frac{\partial v}{\partial y} + e^z \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (\tilde{2})$$

В $(\tilde{2})$ x, y, z – независимые переменные, $v(x, y, z)$ – неизвестная функция. Уравнение $(\tilde{2})$ – линейное однородное относительно неизвестной функции $v(x, y, z)$.

Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую уравнению $(\tilde{2})$:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz} = \frac{dz}{e^z}. \quad (\tilde{3})$$

Найдем интегралы системы $(\tilde{3})$:

$$1) \frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz} \Rightarrow \frac{x dx}{xyz} = \frac{y dy}{-xyz} \Rightarrow \frac{x dx + y dy}{0} = \frac{dz}{e^z} \Rightarrow x dx + y dy = 0 \Rightarrow$$

$$d(x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = C_1 \text{ – первый интеграл системы } (\tilde{3}).$$

$$2) \frac{dx}{yz} = \frac{dz}{e^z}. \text{ Воспользуемся найденным первым интегралом. Будем иметь}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1 - x^2}} = ze^{-z} dz \Rightarrow \arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1}} + (z+1)e^{-z} = C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (z+1)e^{-z} = C_2$$

– это другой первый интеграл системы $(\tilde{3})$.

Общее решение вспомогательного уравнения $(\tilde{2})$ будет таким:

$$v = \psi \left(x^2 + y^2, (z+1)e^{-z} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

а значит, общее решение исходного уравнения $(\tilde{1}) \quad z = z(x, y)$ есть неявная функция, определяемая соотношением

$$\psi \left(x^2 + y^2, (z+1)e^{-z} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$(y+z) \frac{\partial u}{\partial x} + (z+x) \frac{\partial u}{\partial y} + (x+y) \frac{\partial u}{\partial z} = u. \quad (\tilde{4})$$

► $u = u(x, y, z)$ – неизвестная функция. Заданное уравнение $(\tilde{4})$ – линейное неоднородное. Вводим в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$(y+z) \frac{\partial v}{\partial x} + (z+x) \frac{\partial v}{\partial y} + (x+y) \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial u} = 0. \quad (\tilde{5})$$

$(\tilde{5})$ – линейное однородное уравнение относительно неизвестной функции $v = v(x, y, z, u)$. Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих уравнению $(\tilde{5})$:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{du}{u}. \quad (\tilde{6})$$

Найдем интегралы системы $(\tilde{6})$:

$$1) \quad \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{y-x} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{d(x-y)}{x-y} = 0 \Rightarrow$$

$$u(x-y) = C_1.$$

$$2) \quad \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{d(y-z)}{z-y} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{d(y-z)}{y-z} = 0 \Rightarrow$$

$$u(y-z) = C_2.$$

$$3) \text{ Из } (\tilde{6}): \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{x+y+z}{u^2} = C_3.$$

Общее решение вспомогательного уравнения $(\tilde{5})$ будет таким:

$$v = \psi \left(u(x-y), u(y-z), \frac{x+y+z}{u^2} \right).$$

Значит, общее решение исходного уравнения $(\tilde{4})$ есть неявная функция $u = u(x, y, z)$, определяемая соотношением

$$\psi\left(u(x-y), u(y-z), \frac{x+y+z}{u^2}\right) = 0,$$

где ψ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. ◀

2°. Понятие о характеристиках. Рассмотрим простейший пример. Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющее условию

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad (7)$$

где $f(x)$ – известная функция. (6) – (7) – задача Коши.

Обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (6), будет таким:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{1}.$$

Решая его, находим $x = t + C \Rightarrow x - t = C$. Это есть первый интеграл дифференциального уравнения. Но тогда $u = \psi(x - t)$, где ψ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, является общим решением уравнения (6). Для определения функции ψ используем условие (7)

$$\psi(x - t)|_{t=0} = f(x) \Rightarrow \psi(x) = f(x) \Rightarrow \psi = f.$$

Следовательно, $u = f(x - t)$ является решением задачи (6) – (7).

Замечание. В рассмотренном примере, исходя лишь из данного уравнения (6) и условия (7), мы можем на оси абсцисс (т.е. при $t = 0$) определить формально все частные производные от функции $u(x, t)$ по переменным x и t .

Действительно, из (7) находим $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0} = f'(x)$. Затем из (6) получаем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0} = -f'(x). \text{ Потом находим } \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{t=0} = f''(x), \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|_{t=0} = -f''(x),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right|_{t=0} = f''(x), \text{ и т. д.}$$

В таком случае, когда, исходя лишь из (6) и (7), удастся определить формально на линии $t = 0$ все частные производные от функции $u(x, t)$ по переменным x и t , будем говорить, что задача Коши (6) – (7) поставлена правильно. В противном случае мы сказали бы, что задача Коши поставлена неправильно.

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения (6) и кривой (l) , заданной уравнением $\omega(x, t) = 0$. Предполагается при этом, что $\omega(x, t) \in C^1(D)$ и что $(\omega'_x)^2 + (\omega'_t)^2 \neq 0$ в $(D) \subset \mathbf{R}^2$.

Упомянутая задача Коши формулируется так: требуется найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условию

$$u|_{(l)} = f(M). \quad (\tilde{7})$$

Выясним, когда задача Коши (6) – ($\tilde{7}$) оказывается поставленной правильно и когда – нет. Иначе, выясним, когда мы сможем и когда не сможем, исходя лишь из (6) и ($\tilde{7}$), определить на (l) формально все интересующие нас частные производные от функции $u(x, t)$.

Для этого вводим в рассмотрение новые переменные ξ и η по формулам

$$\begin{cases} \xi = \omega(x, t), \\ \eta = t. \end{cases}$$

Тогда $u(x, t) \leftrightarrow u(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=\frac{\partial \omega}{\partial x}} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=0} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=\frac{\partial \omega}{\partial t}} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{=1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Уравнение (6) в новых переменных станет таким:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad (\tilde{6})$$

а начальное условие ($\tilde{7}$) примет вид:

$$u|_{\xi=0} = f_1(\eta). \quad (\tilde{7})$$

Из ($\tilde{6}$) и ($\tilde{7}$) видим:

- 1) если $\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0$ на кривой (l), то задача Коши (6) – ($\tilde{7}$) поставлена правильно;
- 2) если $\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$ на кривой (l), то задача Коши (6) – ($\tilde{7}$) поставлена неправильно.

В первом случае кривую (l) называют *нехарактеристической* или *свободной* для уравнения (6), во втором случае – *характеристической* (или просто *характеристикой*).

Итак, получили:

Кривая (l), заданная уравнением $\omega(x, t) = 0$, – характеристическая для уравнения (6), если на (l)

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

(8) – уравнение для характеристик уравнения (6).

Пусть требуется определить семейство характеристик для уравнения (6). Для этого берем уравнение (8) и составляем соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{dx}{1} = \frac{dt}{1} \Rightarrow x - t = C$ – первый интеграл этого уравнения. Утверждаем, что линии, определяемые соотношением $x - t = C$, образуют семейство характеристик для уравнения (6). Действительно, по теореме 1 предыдущего параграфа, функция $\omega(x, t) = x - t$ является решением уравнения (8). Значит, линии определяемые соотношением $x - t = C$, образуют семейство характеристик для уравнения (6) (рис. 1).

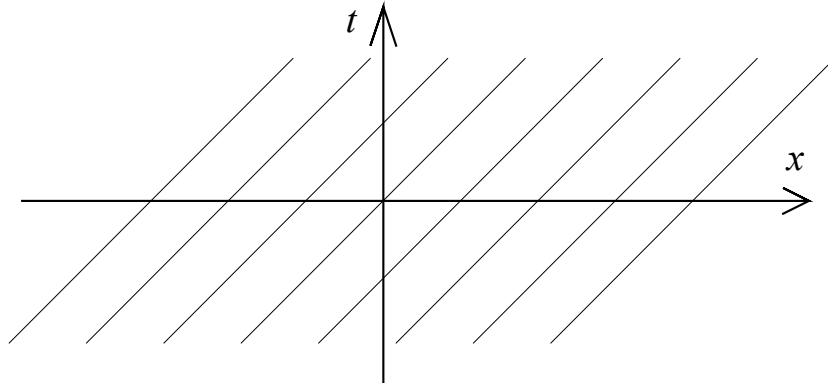


Рис. 1

Если в качестве кривой (l) взять любую линию из семейства $x - t = C$, то коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ в уравнении $(\tilde{6})$ на каждой такой линии будет равен ну-

лю и, следовательно, мы не сможем, исходя из $(\tilde{6})$ и $(\tilde{7})$, определить на (l) все частные производные функции u . Значит, задача Коши для уравнения (6) и такой кривой (l) будет поставлена неправильно.

Замечание. Во всех точках каждой прямой из семейства $x - t = C$ решение $u = f(x - t)$ задачи (6) – (7) имеет свое, но одно и то же значение.

Станем рассматривать теперь более общие примеры.

1. Пусть имеется уравнение вида

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y). \quad (9)$$

Пусть имеется кривая (l), заданная уравнением $\omega(x, y) = 0$. Предполагается, что $\omega(x, y) \in C^1(D)$ и $(\omega'_x)^2 + (\omega'_y)^2 \neq 0$ в $(D) \subset \mathbf{R}^2$.

Задача: найти решение уравнения (9), удовлетворяющее условию

$$u|_{(l)} = f(M), \quad (10)$$

где $f(M)$ – известная функция.

Выясним, когда задача Коши (9) – (10) будет поставленной правильно и когда нет, т.е. выясним, когда мы сможем и когда не сможем, исходя лишь из (9) и (10), определить формально на (l) все интересующие нас частные производные функции $u(x, y)$.

Для этого вводим в рассмотрение новые переменные ξ и η по формулам

$$\begin{cases} \xi = \omega(x, y), \\ \eta = y. \end{cases}$$

Тогда $u(x, y) \rightarrow u(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

В новых переменных уравнение (9) станет таким:

$$\left(a \frac{\partial \omega}{\partial x} + b \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} = c, \quad (9)$$

а условие (10) примет вид

$$u|_{\xi=0} = \tilde{f}(\eta). \quad (10)$$

Из (9) и (10) видим, что

1) если на (l) коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ не равен нулю, то задача Коши (9) – (10)

поставлена правильно и, следовательно, кривая (l) – нехарактеристическая.

2) если же на (l) $a(x, y) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + b(x, y) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$, то задача Коши (9) – (10) по-

ставлена неправильно и, следовательно, кривая (l) – характеристическая.

Соотношение

$$a(x, y) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + b(x, y) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

есть уравнение для характеристик уравнения (9).

Пусть требуется определить семейство характеристик для уравнения (9).

Для этого берем уравнение (11) и составляем соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}.$$

Пусть

$$\psi(x, y) = C \quad (12)$$

– первый интеграл этого уравнения. Утверждаем, что кривые, определяемые соотношением (12), образуют семейство характеристик для уравнения (9). Действительно, по теореме 1 предыдущего параграфа, функция $\omega = \psi(x, y)$ является решением уравнения (11). Следовательно, $a(x, y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + b(x, y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$. Значит, кривые, определяемые соотношением (12), образуют семейство характеристик уравнения (9).

2. Пусть имеется уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = c(x_1, \dots, x_n). \quad (13)$$

В этом случае вместо кривой (l) задается уже поверхность (σ). Пусть $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ – уравнение поверхности (σ). Предполагается, что

$$\begin{aligned} a_i(x_1, \dots, x_n) &\in C^1(D) \quad (i = \overline{1, n}), \\ c(x_1, \dots, x_n) &\in C^1(D), \\ \mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_n) &\neq (0, 0, \dots, 0) \quad \text{B}(D), \\ \omega(x_1, \dots, x_n) &\in C^1(D), \\ (\omega'_{x_1})^2 + (\omega'_{x_2})^2 + \dots + (\omega'_{x_n})^2 &\neq 0 \quad \text{B}(D). \end{aligned}$$

Задача. Найти решение уравнения (13), удовлетворяющее условию

$$u|_{\Sigma} = f(M), \quad (14)$$

где $f(M)$ – известная, заранее заданная функция.

Заметим, что (13) – (14) – задача Коши на поверхности (σ) . Выясним, когда задача Коши (13) – (14) будет поставлена правильно и когда – нет, т.е. выясним, когда мы сможем и когда не сможем, исходя лишь из (13) и (14), определить (формально) на (σ) все интересующие нас частные производные от функции u . Для этого вводим в рассмотрение новые переменные ξ_i ($i = \overline{1, n}$) по формулам

[illegible]

Тогда $u(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow u(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}}_{=0} + \dots + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \xi_n} \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1}}_{=0} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}}_{=1} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \xi_3} \cdot \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}}_{=0} + \dots + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \xi_n} \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2}}_{=0} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_3} &= \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial \xi_3}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} &= \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial \xi_n}. \end{aligned}$$

Уравнение (13) в новых переменных запишется так:

$$\left(a_1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + a_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_n} = c. \quad (15)$$

Начальное условие (14) в новых переменных станет таким

$$u|_{\xi_1=0} = f_1(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n). \quad (16)$$

Из (15) и (16) видим, что:

1) если на (σ) коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ в (15) не равен нулю, то задача Коши

(15) – (16) поставлена правильно и, следовательно, поверхность (σ) – нехарактеристическая;

2) если на (σ)

$$a_1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_n} = 0, \quad (17)$$

то задача Коши (15) – (16) поставлена неправильно и, следовательно, поверхность (σ) – характеристическая;

Соотношение (17) является уравнением для характеристических поверхностей уравнения (13).

Пусть требуется определить семейства характеристических поверхностей для уравнения (13). Для этого берем уравнение (17) и составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую уравнению (17):

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n)}. \quad (18)$$

Пусть

$$\Psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i \quad (i = \overline{1, n-1}) \quad (19)$$

– независимые первые интегралы системы (18). Утверждаем, что поверхности, определяемые соотношениями (19), образуют семейства характеристических поверхностей для уравнения (13).

В самом деле, по теореме 1 предыдущего параграфа, функции $\omega = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = \overline{1, n-1}$) являются решениями уравнения (17). Следовательно,

$$a_1 \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + a_2 \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = 0 \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Значит, поверхности, определяемые соотношениями (19), образуют семейства характеристических поверхностей для уравнения (13).

Пример 4. Найти решение уравнения $2\sqrt{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, удовлетворяющее условию $z(x, y)|_{x=1} = y^2$.

► Заданное уравнение – линейное однородное. Составляем соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение: $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dy}{-y}$, откуда $ye^{\sqrt{x}} = C$ – первый интеграл уравнения. Значит, $z = \psi(ye^{\sqrt{x}})$, где ψ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, есть общее решение заданного уравнения.

В этом примере задача Коши поставлена правильно, так как функция $\omega = x - 1$ не является решением уравнения $2\sqrt{x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ и, следовательно, линия (l) , определяемая уравнением $\omega = 0$ (т.е. уравнением $x = 1$), нехарактеристическая.

Для определения вида функции ψ используем начальное условие $z(x, y)|_{x=1} = y^2$. Имеем: $\psi(ye^{\sqrt{x}})|_{x=1} = y^2$, т.е. $\psi(ye) = y^2$ ($= \frac{(ye)^2}{e^2}$). Значит,

$$\psi(ye^{\sqrt{x}}) = \frac{(ye^{\sqrt{x}})^2}{e^2} \text{ и, следовательно,}$$

$$z(x, y) = \frac{y^2 e^{2\sqrt{x}}}{e^2} = y^2 e^{2(\sqrt{x}-1)}. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти решение уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

удовлетворяющее условию $u(x, y, z)|_{z=0} = x^2 + y^2$.

► Заданное уравнение – линейное однородное. Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих заданному уравнению в частных производных

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}.$$

1) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, откуда $\frac{y}{x} = C_1$ – первый интеграл системы;

2) $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{xy}$, откуда $dx = \frac{dz}{y}$ или, принимая во внимание, что $y = C_1 x$,

$C_1 x dx = dz \Rightarrow z = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \Rightarrow z = \frac{y}{x} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \Rightarrow z - \frac{xy}{2} = C_2$ – это еще один первый интеграл системы.

Значит, $u = \psi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{xy}{2}\right)$, где ψ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, есть общее решение заданного уравнения.

В этом примере задача Коши поставлена правильно, так как функция $\omega = z$ не является решением уравнения

$$x \frac{\partial \omega}{\partial x} + y \frac{\partial \omega}{\partial y} + xy \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

и, следовательно, поверхность (σ) , определяемая уравнением $\omega = 0$ (т.е. уравнением $z = 0$) – нехарактеристическая.

Для определения вида функции ψ используем условие

$$u(x, y, z)|_{z=0} = x^2 + y^2.$$

Имеем $\psi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{xy}{2}\right)|_{z=0} = x^2 + y^2$, т.е. $\psi\left(\frac{y}{x}, -\frac{xy}{2}\right) = x^2 + y^2$.

Поверхность (σ) (в нашем случае плоскость $z = 0$) можно считать заданной

параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = x \\ y = y, \quad x, y - \text{параметры.} \\ z = 0 \end{cases}$$

Подставим эти выражения для x, y, z в найденные первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно, в соотношения:

$\frac{y}{x} = C_1$ и $z - \frac{xy}{2} = C_2$. Получим:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = C_1 \\ -\frac{xy}{2} = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = C_1 x \\ -\frac{C_1}{2} x^2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -\frac{2C_2}{C_1} \\ y^2 = -2C_1 C_2 \end{cases}.$$

У нас $\psi(C_1, C_2)|_{z=0} = x^2 + y^2 = -\frac{2C_2}{C_1} - 2C_1 C_2 = -\frac{2C_2}{C_1}(1 + C_1^2)$. Итак, получили:

$$\psi(C_1, C_2) = -\frac{2C_2}{C_1}(1 + C_1^2).$$

Подставив теперь здесь вместо C_1 и C_2 соответственно $\frac{y}{x}$ и $z - \frac{xy}{2}$, находим

$$\psi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{xy}{2}\right) = -2 \frac{\left(z - \frac{xy}{2}\right) \cdot x}{y} \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{xy - 2z}{xy} (x^2 + y^2).$$

Следовательно, $u(x, y, z) = (xy - 2z) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$. ◀

Пример 6. Найти решение уравнения

$$z \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} + x = 0,$$

удовлетворяющее условию $z(x, y)|_{y=x^2} = 2x$.

► Заданное уравнение – квазилинейное. Рассматриваем вспомогательное уравнение

$$z \frac{\partial v}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial v}{\partial y} - x \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую этому вспомогательному уравнению

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{z^2 - x^2} = \frac{dz}{-x}.$$

$$1) \frac{dx}{z} = \frac{dz}{-x} \Rightarrow x dx + z dz = 0 \Rightarrow z^2 + x^2 = C_1 - \text{первый интеграл системы};$$

$$2) \frac{dx + dz}{z - x} = \frac{dy}{(z - x)(z + x)} \Rightarrow (z + x) d(z + x) = dy \Rightarrow \frac{(z + x)^2}{2} = y + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{(z + x)^2}{2} - y = C_2 - \text{первый интеграл системы.}$$

$$v = \psi\left(z^2 + x^2, \frac{(z + x)^2}{2} - y\right) - \text{общее решение вспомогательного уравнения.}$$

Соотношение $\psi\left(z^2 + x^2, \frac{(z + x)^2}{2} - y\right) = 0$, где ψ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, дает общее решение исходного уравнения. Последнее соотношение может быть записано в виде $\frac{(z + x)^2}{2} - y = f(z^2 + x^2)$, где f – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Задача Коши в этом примере поставлена правильно, так как функция $\omega = y - x^2$ не является решением уравнения $z \frac{\partial \omega}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial \omega}{\partial y} - x \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$ и,

следовательно, линия (l) , определяемая уравнением $\omega = 0$ (т.е. уравнением $y = x^2$), нехарактеристическая.

Для определения вида функции f используем условие $z(x, y)|_{y=x^2} = 2x$.

Имеем

$$f(z^2 + x^2)|_{y=x^2} = \left[\frac{(z+x)^2}{2} - y \right]_{y=x^2}.$$

Так как $z|_{y=x^2} = 2x$, то последнее соотношение запишется в виде

$$f(5x^2) = \frac{9x^2}{2} - x^2 = \frac{7}{2}x^2 \Rightarrow f(5x^2) = \frac{7}{10}(5x^2).$$

Значит, $f(z^2 + x^2) = \frac{7}{10}(z^2 + x^2)$, и, следовательно, будем иметь

$$\frac{7}{10}(z^2 + x^2) = \frac{(z+x)^2}{2} - y \Rightarrow (z^2 + x^2) = 5(xz - y). \blacktriangleleft$$

§7. Продолжение решений. Нелокальные свойства решений

Пусть имеется нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

Считаем, что $F(x, Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$, $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ – локально. Рассмотрим произвольное решение системы (1)

$$Y = \varphi(x), \quad x \in I = \langle a, b \rangle. \quad (2)$$

Определение. Если существует решение системы (1)

$$Y = \varphi_1(x), \quad x \in I_1 = \langle a_1, b_1 \rangle, \quad (3)$$

такое, что

$$1) \quad I \subset I_1, \quad I \neq I_1, \quad \text{и}$$

$$2) \quad \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in I,$$

то решение (2) называется *продолжимым*, а решение (3) называется *продолжением* решения (2) на промежуток I_1 .

Если промежуток I_1 является расширением промежутка I лишь вправо, то решение (2) называется *продолжимым вправо*, а решение (3) называется *продолжением вправо*.

Если промежуток I_1 является расширением промежутка I лишь влево, то решение (2) называется *продолжимым влево*, а решение (3) называется *продолжением влево*.

Теорема 1 (о продолжимости решения, определенного на сегменте или полусегменте). Пусть $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, – решение системы (1). Тогда:

- 1) если $I = [a, b]$, то решение $Y = \varphi(x)$ продолжимо в обе стороны;
- 2) если $I = [a, b)$, то решение $Y = \varphi(x)$ продолжимо влево;
- 3) если $I = (a, b]$, то решение $Y = \varphi(x)$ продолжимо вправо.

► Пусть для определенности $Y = \varphi(x)$ – решение системы (1), определенное на $I = (a, b]$. Покажем, что это решение продолжимо вправо. Пусть $\varphi(b) = C$. По определению решения, точка $(b, \varphi(b))$, т.е. точка $(b, C) \in (D)$.

Так как точка $(b, C) \in (D)$, то существует решение системы (1), проходящее через эту точку. Пусть таковым решением является

$$Y = \psi(x), \quad x \in [b-h, b+h], \quad h > 0, \quad \psi(b) = C.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in I = (a, b], \\ \psi(x), & x \in [b, b+h]. \end{cases}$$

Отметим, что $\varphi_1(x)$ определена и непрерывна на $I_1 = (a, b+h]$. Покажем, что она является решением системы на промежутке $(a, b+h] = I_1$.

Имеем: 1) для любого $x \in I_1$ точка $(x, \varphi_1(x)) \in (D)$.

Имеем, далее:

$$\text{для } x \in (a, b) \quad \varphi'_1(x) = \varphi'(x) = F(x, \varphi(x)) = F(x, \varphi_1(x));$$

$$\text{для } x \in (b, b+h] \quad \varphi'_1(x) = \psi'(x) = F(x, \psi(x)) = F(x, \varphi_1(x)).$$

$\varphi(x)$ имеет в точке b левостороннюю производную $\Rightarrow \varphi_1(x)$ имеет в точке b левостороннюю производную, причем

$$\varphi'_1(b-0) = \varphi'(b-0) = F(b, \varphi(b)) = F(b, C).$$

$\psi(x)$ имеет в точке b правостороннюю производную $\Rightarrow \varphi_1(x)$ имеет в точке b правостороннюю производную, причем

$$\varphi'_1(b+0) = \psi'(b+0) = F(b, \psi(b)) = F(b, C).$$

Видим, что существуют $\varphi'_1(b-0)$ и $\varphi'_1(b+0)$, причем $\varphi'_1(b-0) = \varphi'_1(b+0) = F(b, C) \Rightarrow$ существует $\varphi'_1(b)$, причем

$$\varphi'_1(b) = F(b, C) = F(b, \varphi_1(b)).$$

Таким образом, для $x \in I_1$ существует $\varphi'_1(x)$, причем $\varphi'_1(x) = F(x, \varphi_1(x))$.

Вывод: вектор-функция $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a, b+h]$ есть решение системы (1). Это решение определено на промежутке I_1 , который является расширением вправо промежутка I . Так как $\varphi_1(x) \equiv \varphi(x)$, $x \in I$, то заключаем, что $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, – продолжение вправо решения $\varphi(x)$, $x \in I$.

Следствие. Решение системы (1), определенное на некотором сегменте или полусегменте, всегда может быть продолжено на некоторый интервал.

► Для определенности рассмотрим опять решение $Y = \varphi(x)$ системы (1), определенное на $I = (a, b]$. По теореме 1 это решение имеет продолжение $\varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a, b_1]$, где $b_1 = b + h$, $h > 0$. По теореме 1 решение $\varphi_1(x)$ имеет продолжение $\varphi_2(x)$, $x \in I_2 = (a, b_2]$, где $b_2 = b_1 + h_1$, $h_1 > 0$.

Очевидно, что решение $\varphi_2(x)$, $x \in I_2$, является продолжением исходного решения $\varphi(x)$, $x \in I$. Продолжая этот процесс аналогичным образом, получим бесконечную последовательность продолжений исходного решения $\varphi(x)$, $x \in I$:

$$\varphi_n(x), \quad x \in I_n = (a, b_n], \quad b_n = b_{n-1} + h_{n-1}, \quad h_{n-1} > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Здесь $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – монотонно возрастающая числовая последовательность. Следовательно, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{b}$ ($\tilde{b} \leq +\infty$).

Рассмотрим теперь вектор-функцию:

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi_n(x), \quad x \in I_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Эта функция определена на любом I_n и, следовательно, определена на

$$\tilde{I} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (a, \tilde{b}).$$

При этом для любого $x \in \tilde{I}$ существует n такое, что $x \in (a, b_n)$

и, следовательно,

$$\tilde{\varphi}'(x) = \varphi'_n(x) = F(x, \varphi_n(x)) = F(x, \tilde{\varphi}(x)).$$

Это означает, что функция

$$Y = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in \tilde{I} = (a, \tilde{b})$$

есть решение системы (1). Ясно, что она – продолжение исходного решения вправо.

Таким образом, любое решение системы (1) мы можем считать определенным на некотором интервале.

Теорема 2 (об условиях продолжимости решения, заданного на интервале). Пусть

$$Y = \varphi(x), \quad x \in I = (a, b) \tag{*}$$

– решение системы (1) (считаем, что $b < +\infty$). Тогда:

I. если решение (*) удовлетворяет условиям:

$$1) \text{ существует } \lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = C,$$

$$2) \text{ точка } (b, C) \in (D),$$

то решение (*) продолжимо вправо на некоторый интервал $I_1 = (a, b_1)$, где $b_1 > b$,

и наоборот,

II. если решение (*) продолжимо вправо на некоторый интервал $I_1 = (a, b_1)$, где $b_1 > b$, то существует $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = C$, и точка $(b, C) \in (D)$.

Замечание. В предположении, что $a > -\infty$, аналогичные утверждения имеют место для продолжимости решения (*) влево.

► I. Рассмотрим вектор-функцию

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in I = (a, b), \\ C, & x = b. \end{cases}$$

Эта функция определена на промежутке $I_1 = (a, b]$ и, согласно условию 1) теоремы, $\varphi_1(x) \in C(I_1)$. Покажем, что $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, является решением системы (1) на промежутке I_1 .

Имеем:

1) для $x \in (a, b]$ точка $(x, \varphi_1(x)) \in (D)$.

В самом деле, для $x \in (a, b)$ $\varphi_1(x) \equiv \varphi(x)$, а точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$; для $x = b$ точка $(b, C) \in (D)$.

Имеем, далее,

2) для $x \in (a, b)$

$$\varphi_1'(x) = \varphi'(x) = F(x, \varphi(x)) = F(x, \varphi_1(x)).$$

Устремим в этом равенстве x к $b-0$. Получим:

$$\varphi_1'(x) = F(x, \varphi(x)) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} F(b, C)$$

$\Rightarrow$ $\varphi_1(x)$ в точке $x = b$ имеет левостороннюю производную, причем $\varphi_1'(b-0) = F(b, C)$.

Видим, таким образом, что $\varphi_1(x)$ – решение системы (1), определенное на $I_1 = (a, b]$. Ясно, что $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, – продолжение решения (*) на промежуток $(a, b]$.

По следствию к теореме 1, $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, можно продолжить на некоторый интервал $I_2 = (a, b_1)$, где $b_1 > b$. Обозначим это продолжение через

$$\varphi_2(x), \quad x \in I_2.$$

Ясно, что $\varphi_2(x)$, $x \in I_2$, – продолжение решения (*) на I_2 . Утверждение I теоремы доказано.

II. По условию, решение (*) имеет продолжение вправо: $\varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a, b_1)$, где $b_1 > b \Rightarrow$ существует $\lim_{x \rightarrow b} \varphi_1(x) = \varphi_1(b)$. Но тогда

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} \varphi_1(x) = \varphi_1(b) = C, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) \text{ существует.}$$

Имеем, далее: точка $(b, C) = (b, \varphi_1(b)) \in (D)$ как точка графика решения $Y = \varphi_1(x)$ системы (1). Видим, что утверждение II теоремы доказано. ◀

Теорема 3 (об условиях существования предела у решения $\varphi(x)$, заданного на интервале). Пусть $Y = \varphi(x)$ – решение системы (1), определенное на интервале $I = (a, b)$ ($b < +\infty$). Пусть точка $x_0 \in (a, b)$. Если вектор-функция $F(x, \varphi(x))$, $x \in [x_0, b)$, ограничена по норме, т.е. если существует $M > 0$ такое, что $\|F(x, \varphi(x))\| \leq M$, $x \in [x_0, b)$, то существует $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x)$.

► У нас $\varphi(x)$, $x \in I$ – решение системы (1). Следовательно, справедливо тождество

$$\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x)), \quad x \in I.$$

Проинтегрируем это тождество по отрезку $[x_0, x] \subset [x_0, b)$. Получим

$$\varphi(x) \equiv \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x F(x, \varphi(x)) dx, \quad x \in [x_0, b). \quad (*)$$

Возьмем теперь последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – любую, но такую, что $x_n \in [x_0, b)$ и $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$. Рассмотрим соответствующую последовательность значений функции

$$\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}. \quad (\Delta)$$

Покажем, что она фундаментальная. Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. У нас последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – сходящаяся. $(x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b) \Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отве-

чает номер N такой, что для любых $n_1, n_2 > N$: $|x_{n_1} - x_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{M}$. В тождестве (*)

положим сначала $x = x_{n_1}$, а затем $x = x_{n_2}$. Получим два соотношения. Вычтем из второго соотношения соответствующие части первого. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_{n_1}) &= \int_{x_{n_1}}^{x_{n_2}} F(x, \varphi(x)) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_{n_1})\| &\leq \left\| \int_{x_{n_1}}^{x_{n_2}} F(x, \varphi(x)) dx \right\| \leq M \cdot |x_{n_2} - x_{n_1}| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Видим, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что для любых $n_1, n_2 > N$ $\|\varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_{n_1})\| < \varepsilon$. Последнее означает, что $\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – фундаментальная. А из фундаментальности следует существование $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)$.

Итак, для любой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, такой, что $x_n \in [x_0, b)$ и $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, оказывается, что соответствующая последовательность $\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

имеет конечный предел (важно подчеркнуть, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$). Значит, существует $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x)$. ◀

Замечание. Обозначим $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = C$. Следует иметь в виду, что точка (b, C) может принадлежать, а может и не принадлежать (D) .

Следствие. Пусть $\varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$ ($b < +\infty$), – решение системы (1). Пусть существует ограниченная замкнутая область $(\bar{D}_1) \subset (D)$ такая, что при некотором $x_0 \in (a, b)$ оказывается: точки $(x, \varphi(x)) \in (\bar{D}_1)$, $x \in [x_0, b)$. Тогда решение $\varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо вправо на $I_1 = (a, b_1)$ ($b_1 > b$).

► Так как $(\bar{D}_1)$ – ограниченная замкнутая и $(\bar{D}_1) \subset (D)$, то $F(x, Y)$ – ограниченная на $(\bar{D}_1)$. По условию, точки $(x, \varphi(x)) \in (\bar{D}_1)$, $x \in [x_0, b) \Rightarrow F(x, \varphi(x))$, $x \in [x_0, b)$, – ограниченная. Тогда по теореме 3 существует $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = C$. У нас точки $(x, \varphi(x)) \in (\bar{D}_1)$, $x \in [x_0, b)$. Но тогда и предельная точка $(b, C) \in (\bar{D}_1) \subset (D)$. Видим, что выполнены условия теоремы 2 $\Rightarrow$ решение $\varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на интервал I_1 вправо. ◀

Определение. Пусть

$$Y = \varphi(x), \quad x \in I = \langle a, b \rangle, \quad (2)$$

– решение системы

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

Пусть (2) продолжимо на некоторый интервал $I^* = (\alpha, \beta)$, но не продолжимо ни на какой более широкий промежуток. Тогда I^* называют *максимальным интервалом существования решения* (2).

Если решение (2) продолжимо на $\tilde{I}^* = \langle a, \beta \rangle$, но не продолжимо вправо ни на какой более широкий интервал, то $\tilde{I}^*$ называют *максимальным вправо интервалом существования решения* (2).

Если решение (2) продолжимо на $\tilde{\tilde{I}}^* = (\alpha, b \rangle$, но не продолжимо влево ни на какой более широкий интервал, то $\tilde{\tilde{I}}^*$ называют *максимальным влево интервалом существования решения* (2).

Теорема 4 (о существовании максимального интервала существования решения). Любое решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, системы (1) имеет максимальный интервал существования $I^* = (\alpha, \beta)$.

► Из следствия к теореме 1 следует, что решение $Y = \varphi(x)$ системы (1) можно считать заданным на некотором интервале $I = (a, b)$. Докажем сначала, что для $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, существует интервал существования решения $\tilde{I}^*$ – максимальный вправо. Могут иметь место два случая.

1 случай: $I = (a, +\infty)$. В этом случае интервал $(a, +\infty)$ уже является максимальным вправо.

2 случай: $I = (a, b)$, $b < +\infty$. В этом случае станем рассматривать промежуток $[b, +\infty)$. Все числа этого промежутка разобьем на два класса A и B по следующему правилу:

берем произвольное число c из промежутка $[b, +\infty)$; если решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на $(a, c]$, то c отправляем в класс A ;

если решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, непродолжимо на $(a, c]$, то c отправляем в класс B .

Могут реализоваться следующие возможности:

1) $A = \emptyset$, т.е. для любого $c \in [b, +\infty)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, непродолжимо на $(a, c]$. Это означает, что решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, непродолжимо вправо. Значит, (a, b) – является максимальным вправо интервалом существования решения $Y = \varphi(x)$.

2) $B = \emptyset$, т.е. для любого $c \in [b, +\infty)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на $(a, c]$. Это означает, что решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на $(a, +\infty)$. Следовательно, $I^* = (a, +\infty)$ – максимальный вправо интервал существования решения $Y = \varphi(x)$.

3) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Так как

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset,$$

любое число $c \in [b, +\infty)$ попадает либо только в A , либо только в B ,

$$c_1 < c_2, \text{ если } c_1 - \text{любое из } A, \text{ а } c_2 - \text{любое из } B,$$

то существует число $\beta = A|B$, осуществляющее сечение $[b, +\infty)$. Отметим, что $\beta \in B$ (если бы было $\beta \notin B$, то $\beta \in A$, причем $\beta = \max A \Rightarrow$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, было бы продолжимо вправо на $I_1 = (a, \beta]$, а, следовательно, по теореме 1 оно было бы продолжимо на промежуток $(a, \beta + h]$, где $h > 0 \Rightarrow \beta + h \in A \Rightarrow \beta$ не есть $\max A$).

Таким образом, в случае 3) будем иметь:

для любого $c \in [b, \beta)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на $(a, c]$; значит, оно продолжимо на (a, β) , а

для любого $c \in [\beta, +\infty)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, непродолжимо на $(a, c]$.

Вывод. Решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на $\tilde{I}^* = (a, \beta)$ и непродолжимо ни на какой более широкий интервал вправо.

Совершенно аналогично устанавливается, что для решения $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, имеется интервал существования $\tilde{I}^* = (\alpha, b)$ – максимальный влево.

Общий вывод. Решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, имеет максимальный интервал существования $I^* = (\alpha, \beta)$. ◀

Теорема 5 (нелокальная теорема единственности). Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

Пусть $F(x, Y) \in C(D)$; $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ – локально, $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Тогда любые два решения системы (1), имеющие общую точку, совпадают на общем промежутке их существования.

► Пусть $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a_1, b_1)$, и $Y = \varphi_2(x)$, $x \in I_2 = (a_2, b_2)$, – два решения системы (1) – любые, но такие, что существует точка $x_0 \in I_1 \cap I_2$, в которой

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = Y_0.$$

Пусть $I = I_1 \cap I_2 = (a, b)$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$\varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x), \quad x \in I.$$

Будем доказывать это тождество для промежутка $I^+ = [x_0, b)$ (для промежутка $I^- = (a, x_0]$ доказательство аналогичное).

От противного. Допустим, что $\varphi_2(x) \not\equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, b)$. Но тогда существует число $\tilde{b} \in [x_0, b)$ такое, что

$$1) \quad \varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x), \quad x \in [x_0, \tilde{b}],$$

$$2) \quad \varphi_2(x) \not\equiv \varphi_1(x), \quad x \in [x_0, \tilde{b} + \delta), \text{ для любого } \delta > 0.$$

В точке $\tilde{b}$ оба решения определены, причем

$$\varphi_2(\tilde{b}) = \varphi_1(\tilde{b}) = \tilde{C}.$$

Тогда точка $(\tilde{b}, \tilde{C}) \in (D)$ (это – общая точка графиков наших решений).

Теперь можем применить локальную теорему единственности. Так как решения $Y = \varphi_1(x)$ и $Y = \varphi_2(x)$ проходят через точку $(\tilde{b}, \tilde{C})$, то существует число $\tilde{\delta} > 0$, такое, что

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x), \quad x \in (\tilde{b} - \tilde{\delta}, \tilde{b} + \tilde{\delta}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x), \quad x \in [x_0, \tilde{b} + \tilde{\delta}).$$

А это противоречит тому, что $\varphi_2(x) \not\equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, \tilde{b} + \delta)$, для любого $\delta > 0$. Значит, предположение, что $\varphi_2(x) \not\equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, b)$, неверно.

Вывод: $\varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, b)$. ◀

Следствие (из теоремы 5). Если решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на интервал I_1 , то это его продолжение на I_1 – единственное.

► В самом деле, пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – любые два продолжения решения $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, на промежуток I_1 . Но тогда оба эти решения определены на I_1 и совпадают на I . Значит, по теореме 5, они совпадают на I_1 . ◀

Теорема 6 (нелокальная теорема существования решения). Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

Пусть $F(x, Y) \in C(D)$; $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ — локально, где $(D) = \{(x, Y), a < x < b, \|Y\| < +\infty\}$. Пусть $\|F(x, Y)\| \leq p(x) \cdot \|Y\| + q(x)$, $(x, Y) \in (D)$, $p(x), q(x) \in C((a, b))$, $p(x), q(x) \geq 0$, $x \in (a, b)$. Тогда любое решение $Y = \varphi(x)$ системы (1) продолжимо на интервал (a, b) .

► Пусть $Y = \varphi(x)$ — произвольное решение системы (1). Пусть $I = (\alpha, \beta)$ — максимальный интервал существования этого решения. Покажем, что $I = (\alpha, \beta) = (a, b)$.

Допустим, что это не так. Пусть, например, $\beta < b$ ($\alpha = a$) ($\Rightarrow (\alpha, \beta) \subset (a, b)$; $(\alpha, \beta) \neq (a, b)$). Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Рассмотрим решение $Y = \varphi(x)$ на промежутке $[x_0, \beta)$. Покажем, что решение $Y = \varphi(x)$ — ограниченное на $[x_0, \beta)$.

Действительно, у нас $\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x))$, $x \in [x_0, \beta)$. Проинтегрируем это тождество по промежутку $[x_0, x] \subset [x_0, \beta)$. Получим:

$$\varphi(x) \equiv \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x F(t, \varphi(t)) dt, \quad x \in [x_0, \beta).$$

Оценим по норме:

$$\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(x_0)\| + \int_{x_0}^x (p(t) \cdot \|\varphi(t)\| + q(t)) dt, \quad x \in [x_0, \beta).$$

У нас $[x_0, \beta] \subset (a, b)$. Поэтому $p(t), q(t) \in C([x_0, \beta]) \Rightarrow$ существует $M > 0$ такое, что $p(t) \leq M$, $q(t) \leq M$, $t \in [x_0, \beta]$. А тогда

$$\|\varphi(x)\| \leq \underbrace{\|\varphi(x_0)\| + M \cdot (\beta - x_0)}_{=\lambda = \text{const} > 0} + M \cdot \int_{x_0}^x \|\varphi(t)\| dt, \quad x \in [x_0, \beta).$$

Видим, что $\|\varphi(x)\| = f(x)$ (обозначение) удовлетворяет на $[x_0, \beta]$ условиям леммы Гронуола

$$\Rightarrow \|\varphi(x)\| \leq \lambda e^{M \cdot (x - x_0)} \leq \underbrace{\lambda e^{M \cdot (\beta - x_0)}}_{=M_1 = \text{const}} = M_1, \quad x \in [x_0, \beta).$$

Рассмотрим теперь $(\bar{D}_1) = \begin{cases} x_0 \leq x \leq \beta, \\ \|Y\| \leq M_1. \end{cases}$ Видим, что $(\bar{D}_1)$ — ограниченная

замкнутая область, такая, что $(\bar{D}_1) \subset (D)$. Из изложенного выше следует: существует точка $x_0 \in (\alpha, \beta)$ такая, что для любого x из промежутка $[x_0, \beta)$ оказывается: точка $(x, \varphi(x)) \in (\bar{D}_1)$. Но тогда по следствию к теореме 3 решение $\varphi(x)$,

$x \in (\alpha, \beta)$, продолжимо вправо, а это не так (у нас по условию промежуток (α, β) – максимальный вправо интервал существования решения $\varphi(x)$). Значит, наше предположение, что $(\alpha, \beta) \neq (a, b)$, неверно. Следовательно, $(\alpha, \beta) = (a, b)$. ◀

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Некоторые сведения из теории матриц

1) Матрицу A , имеющую n строк и k столбцов, будем обозначать либо символом $A = \{a_{ij}\}$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, k}$; $i, j \in \mathbf{N}$), a_{ij} – числа (вещественные или ком-

плексные), либо символом $A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, где $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ ($j = \overline{1, k}$).

2) Пусть α – определенное число. Тогда, как известно,

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha = \{\alpha \cdot a_{ij}\};$$

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \quad (A \text{ и } B \text{ – матрицы одинакового строения}).$$

3) Пусть $A = \{a_{il}\}$ ($i = \overline{1, n}$; $l = \overline{1, k}$), $B = \{b_{lj}\}$ ($l = \overline{1, k}$; $j = \overline{1, m}$). По определению считают

$$A \cdot B = \left\{ \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{lj} \right\} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}).$$

Отметим, что

$$A \cdot B = A \cdot (b_1, b_2, \dots, b_m) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, \dots, A \cdot b_m).$$

4) **Определение.** Нормой матрицы $A = \{a_{ij}\}$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, k}$) называют число $\max_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, k}}} |a_{ij}| = \|A\|$.

Легко убедиться, что выполняются соотношения

$$\|A\| \geq 0 \text{ для любой } A, \text{ причем } (\|A\| = 0) \Leftrightarrow (A = 0);$$

$$\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|;$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (A \text{ и } B \text{ – матрицы одинакового строения}).$$

Отметим следующее свойство нормы произведения матриц.

Пусть $A = \{a_{il}\} \quad (i = \overline{1, n}; \quad l = \overline{1, k}), \quad B = \{b_{lj}\} \quad (l = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, m})$. Тогда $\|A \cdot B\| \leq k \cdot \|A\| \cdot \|B\|$.

► В самом деле, имеем

$$\|A \cdot B\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, m}}} \left| \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{lj} \right| \leq \max_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, m}}} \left(\sum_{l=1}^k |a_{il}| \cdot |b_{lj}| \right) \leq \sum_{l=1}^k \|A\| \cdot \|B\| = k \cdot \|A\| \cdot \|B\|. \blacktriangleleft$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$A(x) = \{a_{ij}(x)\} \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, k}),$$

в которой $a_{ij}(x)$ – функции вещественного аргумента x , определенные в некотором промежутке $I = \langle a, b \rangle$. $A(x)$ называют *матрицей-функцией* аргумента x .

5) Говорят, что $A(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in I$, если в этой точке оказываются непрерывными одновременно функции $a_{ij}(x)$ ($i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, k}$).

$A(x)$ непрерывна на промежутке I , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

6) Производная матрицы функции $A(x)$ определяется соотношением

$$\frac{dA(x)}{dx} = \left\{ \frac{da_{ij}(x)}{dx} \right\} \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, k}).$$

$\frac{dA(x)}{dx}$ существует, если существуют одновременно $\frac{da_{ij}(x)}{dx}$ ($i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, k}$).

Справедливы следующие утверждения.

Пусть матрицы-функции $A(x)$ и $B(x)$ одинакового строения, определенные и дифференцируемые на I . Тогда $\frac{d}{dx}(A(x) + B(x)) = \frac{dA(x)}{dx} + \frac{dB(x)}{dx}$, $x \in I$.

Пусть $A(x)$ определена и дифференцируема на I , α – постоянное число. Тогда $\frac{d}{dx}(\alpha \cdot A(x)) = \alpha \cdot \frac{dA(x)}{dx}$, $x \in I$.

Пусть $A(x) = \{a_{il}(x)\}$ ($i = \overline{1, n}; \quad l = \overline{1, k}$) определена и дифференцируема на I , $B(x) = \{b_{lj}(x)\}$ ($l = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, m}$) определена и дифференцируема на I . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(A(x) \cdot B(x)) &= \left\{ \frac{d}{dx} \sum_{l=1}^k a_{il}(x) \cdot b_{lj}(x) \right\} = \left\{ \sum_{l=1}^k (a'_{il}(x) \cdot b_{lj}(x) + a_{il}(x) \cdot b'_{lj}(x)) \right\} = \\ &= \frac{dA(x)}{dx} \cdot B(x) + A(x) \cdot \frac{dB(x)}{dx}, \quad x \in I. \end{aligned}$$

Замечание. Пусть $A(x)$ – квадратная матрица-функция, определенная и дифференцируемая на I . Тогда

$$\frac{d}{dx}\left(A^2(x)\right)=A'(x)\cdot A(x)+A(x)\cdot A'(x), \quad x\in I.$$

Следует помнить, что, вообще говоря, $\frac{d}{dx}(A^2(x)) \neq 2A(x) \cdot A'(x)$, $x \in I$, ибо матрицы $A'(x)$ и $A(x)$ часто оказываются некоммутирующими.

7) Пусть $A(x) \in C(I)$, $I = [a, b]$. $\int_a^b A(x) dx$ определяется соотношением

$$\int_a^b A(x) dx = \left\{ \int_a^b a_{ij}(x) dx \right\} \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, k}).$$

В частности, для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$\int_a^x A(t) dt = \left\{ \int_a^x a_{ij}(t) dt \right\} \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, k}).$$

Отметим, что

$$\frac{d}{dx} \int_a^x A(t) dt = A(x), \quad x \in [a, b].$$

Рассмотрим вопрос о норме интеграла. Имеем

$$\left\| \int_a^b A(x) dx \right\| = \max_{\substack{i=1, n \\ j=1, k}} \left| \int_a^b a_{ij}(x) dx \right| \leq \max_{\substack{i=1, n \\ j=1, k}} \left| \int_a^b \underbrace{a_{ij}(x)}_{\leq \|A(x)\|} dx \right| \leq \left| \int_a^b \|A(x)\| dx \right|.$$

§2. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Простейшие свойства решений линейных однородных систем

Система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x) \cdot y_1 + a_{12}(x) \cdot y_2 + \dots + a_{1n}(x) \cdot y_n + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x) \cdot y_1 + a_{22}(x) \cdot y_2 + \dots + a_{2n}(x) \cdot y_n + f_2(x), \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x) \cdot y_1 + a_{n2}(x) \cdot y_2 + \dots + a_{nn}(x) \cdot y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (\tilde{I})$$

называется линейной.

Считаем, что $a_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$) и $f_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) – некоторые вещественные функции от x , определенные и непрерывные в $I = (a, b)$.

Пусть

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}; \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}; \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда система $(\tilde{1})$ может быть записана в виде

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y + F(x). \quad (1)$$

Обозначим $A(x) \cdot Y + F(x) = \mathbf{F}(x, Y)$. Ясно, что $\mathbf{F}(x, Y) \in C(D)$, где

$$(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ \|Y\| < +\infty. \end{cases} \quad \text{Имеем}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}(x, Y)}{\partial Y} = A(x) \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}(x, Y)}{\partial Y} \in C(D).$$

Значит, (D) – область существования и единственности решений системы (1).

Положим $p(x) = \max_{i,j=1,n} |a_{ij}(x)|$, $q(x) = \max_{i=1,n} |f_i(x)|$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(x, Y)\| &= \|A(x) \cdot Y + F(x)\| \leq \|A(x) \cdot Y\| + \|F(x)\| \leq \\ &\leq p(x) \cdot n \cdot \|Y\| + q(x) = \tilde{p}(x) \cdot \|Y\| + q(x), \end{aligned}$$

где $\tilde{p}(x) = p(x) \cdot n$.

Видим, что выполнены условия нелокальной теоремы существования решения. По этой теореме *любое решение $Y = \Phi(x)$ линейной системы (1) продолжимо на интервал (a, b)* .

Справедливо также утверждение:

Любые два решения линейной системы (1), проходящие через одну и ту же точку, совпадают на всем интервале (a, b) .

Действительно, по указанной выше теореме, любые два решения системы (1) продолжимы на интервал (a, b) . Но тогда, по нелокальной теореме единственности, они совпадают на (a, b) .

Если в системе (1) $F(x) \equiv \mathbf{0}$, $x \in I$, то вместо (1) будем иметь

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \quad (1_0)$$

(1_0) называют линейной *однородной* системой дифференциальных уравнений. Отметим следующие простейшие свойства решений системы (1_0) .

1. $Y = \mathbf{0}$, $x \in I$ – решение системы (1_0) (очевидно).

2. Если вектор-функции $Y = \Phi_1(x)$, $x \in I$, и $Y = \Phi_2(x)$, $x \in I$, – решения линейной однородной системы (1_0) , то вектор-функция $Y = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$, $x \in I$, – решение системы (1_0) .

► В самом деле, так как $Y = \Phi_1(x)$, $x \in I$, и $Y = \Phi_2(x)$, $x \in I$, – решения сис-

темы (1_0) , то

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi_1(x) &\equiv 0, \quad x \in I, \\ \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi_2(x) &\equiv 0, \quad x \in I.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}& \frac{d}{dx}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) - A(x) \cdot (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \\ &= \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi_1(x) - A(x) \cdot \varphi_2(x) = \\ &= \underbrace{\left(\frac{d\varphi_1(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi_1(x) \right)}_{\equiv 0, \quad x \in I} + \underbrace{\left(\frac{d\varphi_2(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi_2(x) \right)}_{\equiv 0, \quad x \in I} \equiv 0, \quad x \in I \Rightarrow\end{aligned}$$

$\Rightarrow Y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad x \in I$, – решение системы (1_0) . ◀

3. Если $Y = \varphi(x), \quad x \in I$, – решение системы (1_0) , а C – постоянная скалярная величина, то $Y = C \cdot \varphi(x), \quad x \in I$, – решение системы (1_0) .

► Действительно, по условию $Y = \varphi(x), \quad x \in I$, – решение системы $(1_0) \Rightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi(x) \equiv 0, \quad x \in I$. Имеем

$$\begin{aligned}& \frac{d}{dx}(C \cdot \varphi(x)) - A(x) \cdot (C \cdot \varphi(x)) = C \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} - C \cdot A(x) \cdot \varphi(x) = \\ &= C \cdot \underbrace{\left(\frac{d\varphi(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi(x) \right)}_{\equiv 0, \quad x \in I} \equiv 0, \quad x \in I \Rightarrow\end{aligned}$$

$\Rightarrow Y = C \cdot \varphi(x), \quad x \in I$, – решение системы (1_0) . ◀

Следствие. Если $Y = \varphi_1(x), \quad x \in I$; $Y = \varphi_2(x), \quad x \in I$; ... ; $Y = \varphi_m(x), \quad x \in I$, – решения линейной однородной системы (1_0) , а $C_1, C_2, \dots, C_m$ – произвольные постоянные числа, то вектор-функция

$$Y = C_1 \cdot \varphi_1(x) + C_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots + C_m \cdot \varphi_m(x)$$

– решение системы (1_0) .

Замечание. Если $m = n$, то вектор-функция

$$Y = C_1 \cdot \varphi_1(x) + C_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots + C_n \cdot \varphi_n(x), \quad x \in I, \quad (2)$$

будет решением системы (1_0) , зависящим от x и от $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Вопрос: будет ли (2) общим решением системы (1_0) ?

Ответ: не всегда.

Выясним, какими должны быть решения $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ системы (1_0) , чтобы вектор-функция (2) была общим решением этой системы.

§3. Линейная зависимость и линейная независимость вектор-функций. Признаки линейной независимости решений линейной однородной системы.

Пусть

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (n \in \mathbf{N}) \quad (1)$$

– вектор-функции, определенные на некотором $I = (a, b)$.

Определение. Если существуют числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что

$$\gamma_1 \cdot \varphi_1(x) + \gamma_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots + \gamma_n \cdot \varphi_n(x) \equiv \mathbf{0}, \quad x \in I, \quad (2)$$

то вектор-функции (1) называются линейно зависимыми на $I = (a, b)$.

Если же тождество (2) имеет место лишь тогда, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = 0$, то вектор-функции (1) называются линейно независимыми на I .

Пусть вектор-функции (1) являются решениями линейной однородной системы

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \quad (1_0)$$

Образуем матрицу

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)). \quad (3)$$

$\Phi(x)$ называют матрицей решений системы (1_0) .

Определитель матрицы $\Phi(x)$ обозначают через $W(x)$ и называют вронскианом, составленным для решений системы (1_0) . Таким образом, по определению,

$$W(x) = \det \Phi(x), \quad x \in I.$$

Теорема 1 (необходимый признак линейной зависимости n решений системы (1_0)). Если решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in I$, системы (1_0) линейно зависимы на $I = (a, b)$, то их вронскиан

$$W(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$

► По условию, решения (1) системы (1_0) – линейно зависимые на $I = (a, b)$

$\Rightarrow$ существует (постоянный) вектор $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ такой, что

$$\Phi(x) \cdot C \equiv \mathbf{0}, \quad x \in I. \quad (4)$$

Это означает, что для $x \in I$ линейная алгебраическая система (4) с матрицей коэффициентов $\Phi(x)$ и с неизвестными $C_1, C_2, \dots, C_n$ имеет решение, отличное от чисто нулевого. Но это возможно лишь тогда, когда $\det \Phi(x) = 0$ для $x \in I$. ◀

Следствие (достаточный признак линейной независимости n решений сис-

темы (1_0)). Если существует точка $x_0 \in I$ такая, что $W(x_0) \neq 0$, то решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in I$, системы (1_0) линейно независимы на I .

► Рассуждаем от противного. Допускаем, что решения (1) системы (1_0) – линейно зависимые на I . Но тогда по теореме 1 получаем, что $W(x) \equiv 0, x \in I \Rightarrow$ в частности, $W(x_0) = 0$, а это не так.

Теорема 2 (Достаточный признак линейной зависимости n решений системы (1_0)). Пусть вектор-функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in I$ – решения системы (1_0) . Пусть $W(x)$ – их вронскиан. Если существует точка $x_0 \in I$ такая, что $W(x_0) = 0$, то решения (1) системы (1_0) – линейно зависимые на $I = (a, b)$.

► Введем в рассмотрение линейную алгебраическую систему

$$\Phi(x_0) \cdot C = 0, \quad (5)$$

где $\Phi(x)$ – матрица, составленная из решений (1) системы (1_0) , а $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$ –

неизвестный вектор. По условию, $\det \Phi(x_0) = W(x_0) = 0 \Rightarrow$ система (5) имеет

$$\text{ненулевое решение } C^{(0)} = \begin{pmatrix} C_1^{(0)} \\ C_2^{(0)} \\ \dots \\ C_n^{(0)} \end{pmatrix} \quad (C^{(0)} \neq 0).$$

Рассмотрим решение системы (1_0)

$$Y = C_1^{(0)} \cdot \varphi_1(x) + C_2^{(0)} \cdot \varphi_2(x) + \dots + C_n^{(0)} \cdot \varphi_n(x) = \Phi(x) \cdot C^{(0)}. \quad (6)$$

Это решение, в силу (5), удовлетворяет начальному условию

$$Y|_{x=x_0} = 0 \quad (7)$$

(ибо, в силу (5), $\Phi(x_0) \cdot C^{(0)} = 0$). Но начальному условию (7) удовлетворяет также решение $Y \equiv 0, x \in I$ системы (1_0) . Мы знаем, что для линейной системы любые два решения, проходящие через одну и ту же точку, совпадают на всем интервале $I = (a, b)$. Следовательно, будем иметь:

$$\Phi(x) \cdot C^{(0)} = 0, \quad x \in I.$$

Так как $C^{(0)} \neq 0$, то последнее соотношение означает, что решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in I$, системы (1_0) – линейно зависимые на $I = (a, b)$.

◄

Следствие (необходимый признак линейной независимости n решений системы (1_0)). Если решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in I$, системы (1_0) – линейно независимые на I , то

$$W(x) \neq 0 \quad \text{для } x \in I.$$

► В самом деле, допустим, что имеется хотя бы одна точка $x_0 \in I$ такая, что $W(x_0) = 0$. Но тогда по теореме 2 получаем, что решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in I$, – линейно зависимые на I , а это не так. ◀

Определение. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in I = (a, b)$ – решения системы (1_0) , $\Phi(x)$ – матрица, составленная из этих решений. Если решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in I$, – линейно независимые на I , то матрицу $\Phi(x)$ называют *фундаментальной матрицей* решений системы (1_0) ($\Phi(x)$ – ф. м. р. с. (1_0))).

Если существует точка $x_0 \in I$ такая, что $\Phi(x_0) = E$, то $\Phi(x)$ – ф. м. р. с. (1_0) , нормированная в точке x_0 . Здесь и всюду в дальнейшем E – единичная матрица.

§4. Теорема о составлении общего решения линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Теорема. Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ – ф. м. р. с.

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \quad (1_0)$$

Тогда

$$Y = \Phi(x) \cdot C, \quad (1)$$

где C – произвольный постоянный вектор, есть общее решение системы (1_0) в

$$(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ \|Y\| < +\infty. \end{cases}$$

► 1) Берем произвольную точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ и рассматриваем векторное уравнение

$$Y_0 = \Phi(x_0) \cdot C. \quad (2)$$

(2) представляет собой алгебраическую систему линейных уравнений относительно компонентов вектора C . Определителем этой системы является $\det \Phi(x_0) \neq 0$. Следовательно, (2) однозначно разрешимо относительно C :

$$C^{(0)} = \Phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0.$$

2) Подставив в (1) $C^{(0)}$ вместо C , будем иметь

$$Y = \Phi(x) \cdot C^{(0)} = C_1^{(0)} \cdot \varphi_1(x) + C_2^{(0)} \cdot \varphi_2(x) + \dots + C_n^{(0)} \cdot \varphi_n(x). \quad (3)$$

Вектор-функция (3) представляет собой линейную комбинацию решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in I$, системы $(1_0) \Rightarrow (3)$ – решение системы (1_0) на $I = (a, b)$. Таким образом, показано, что (1) удовлетворяет определению общего решения системы (1_0) . ◀

Замечание. Формула (3) может быть записана в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0. \quad (\tilde{3})$$

$(\tilde{3})$ – общее решение системы (1_0) в форме Коши. В частности, если $\Phi(x_0) = E$, то $(\tilde{3})$ принимает вид

$$Y = \Phi(x) \cdot Y_0.$$

Замечание (об общем виде фундаментальной матрицы решений системы (1_0)).

1) Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ – ф. м. р. с. (1_0) . Пусть C – постоянная, произвольная, неособенная матрица порядка n . Тогда

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot C \quad (4)$$

– тоже ф. м. р. с. (1_0) .

В самом деле, имеем

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot C = \Phi(x) \cdot (C_1, C_2, \dots, C_n) = \left(\underbrace{\Phi(x) \cdot C_1}_{=\Psi_1(x)}, \underbrace{\Phi(x) \cdot C_2}_{=\Psi_2(x)}, \dots, \underbrace{\Phi(x) \cdot C_n}_{=\Psi_n(x)} \right).$$

Так как $\Psi_1(x) = \Phi(x) \cdot C_1$, $\Psi_2(x) = \Phi(x) \cdot C_2$, ..., $\Psi_n(x) = \Phi(x) \cdot C_n$ являются решениями системы (1_0) на $I = (a, b)$, то $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_n(x))$ – матрица решений системы (1_0) .

Имеем, далее,

$$\det \Psi(x) = \underbrace{\det \Phi(x)}_{\neq 0, x \in I} \cdot \underbrace{\det C}_{\neq 0} \neq 0, \quad x \in I \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Psi(x)$ – ф. м. р. с. (1_0) .

2) Пусть $\Phi(x)$ – ф. м. р. с. (1_0) . Пусть $\Psi(x)$ – любая другая ф. м. р. с. (1_0) . Тогда обязательно существует неособенная, постоянная матрица C , такая, что

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot C$$

(т.е. любая ф. м. р. с. (1_0) содержится при некоторой неособенной матрице C в выражении $\Phi(x) \cdot C$).

В самом деле, пусть $\Psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x))$ – произвольная ф. м. р. с., $(1_0) \Rightarrow Y = \psi_j(x)$ ($j = \overline{1, n}$) – решение системы (1_0) . По теореме об общем решении системы (1_0) заключаем: существует постоянный вектор C_j ($j = \overline{1, n}$) такой, что

$$\psi_j(x) = \Phi(x) \cdot C_j \quad (j = \overline{1, n}).$$

Получаем, таким образом,

$$\Psi(x) = (\Phi(x) \cdot C_1, \Phi(x) \cdot C_2, \dots, \Phi(x) \cdot C_n) \equiv \Phi(x) \cdot C,$$

где $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Остается показать, что $\det C \neq 0$. Имеем

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot C \Rightarrow C = \Phi^{-1}(x) \cdot \Psi(x) \Rightarrow \det C = \underbrace{\det \Phi^{-1}(x)}_{\neq 0, x \in I} \cdot \underbrace{\det \Psi(x)}_{\neq 0, x \in I} \neq 0.$$

Отметим, в частности, что если $\Phi(x_0) = E$, то $C = \Psi(x_0)$.

§5. Формула Остроградского – Лиувилля

Пусть имеется линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \quad (1_0)$$

Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ – матрица решений системы (1_0) (не обязательно фундаментальная). Пусть $W(x) = \det \Phi(x)$ – вронскиан. Тогда

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp \left(\int_{x_0}^x \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(t) \right) dt \right), \text{ для любого } x \in (a, b)$$

($x_0 \in (a, b)$ фиксированное, любое.)

► Имеем

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} \Rightarrow \\ &= \underbrace{\varphi_{11}(x)}_{=\varphi_1(x)} \underbrace{\varphi_{22}(x)}_{=\varphi_2(x)} \dots \underbrace{\varphi_{nn}(x)}_{=\varphi_n(x)} \\ \Rightarrow W'(x) &= \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(x) & \varphi'_{12}(x) & \dots & \varphi'_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi'_{21}(x) & \varphi'_{22}(x) & \dots & \varphi'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \\ &+ \dots + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi'_{n1}(x) & \varphi'_{n2}(x) & \dots & \varphi'_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{i-1,1}(x) & \varphi_{i-1,2}(x) & \dots & \varphi_{i-1,n}(x) \\ \varphi'_{i,1}(x) & \varphi'_{i,2}(x) & \dots & \varphi'_{i,n}(x) \\ \varphi_{i+1,1}(x) & \varphi_{i+1,2}(x) & \dots & \varphi_{i+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

У нас вектор-функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ являются решениями системы (1_0) . Поэтому

$$\varphi'_{i1}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{j1}(x), \quad \varphi'_{i2}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{j2}(x), \quad \dots,$$

$$\varphi'_{in}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{jn}(x).$$

А тогда

$$\begin{aligned} W'(x) &= \sum_{i=1}^n \left| \begin{array}{cccc} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{j1}(x) & \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{j2}(x) & \dots & \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{jn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{array} \right| \left. \vphantom{\sum_{i=1}^n} \right\} \begin{array}{l} i\text{-я} \\ \text{строка} \end{array} \Rightarrow \\ \Rightarrow W'(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \left| \begin{array}{cccc} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{j1}(x) & \varphi_{j2}(x) & \dots & \varphi_{jn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{array} \right| \left. \vphantom{\sum_{i=1}^n} \right\} \begin{array}{l} i\text{-я} \\ \text{строка} \end{array} \Rightarrow \\ \Rightarrow W'(x) &= \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) \cdot W(x) = W(x) \cdot \sum_{i=1}^n a_{ii}(x). \end{aligned}$$

Видим, что для $W(x)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Решая это уравнение с начальным условием

$$W(x)|_{x=x_0} = W(x_0) \quad (x_0 \in (a, b)),$$

получаем $W(x) = W(x_0) \cdot \exp \left(\int_{x_0}^x \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(t) \right) dt \right)$, $x \in (a, b)$. Таким образом, формула Остроградского – Лиувилля установлена. ◀

§6. Теорема о составлении общего решения линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Теорема. Пусть имеется линейная неоднородная система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y + F(x). \quad (1)$$

Введем в рассмотрение систему

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \quad (1_0)$$

((1₀) – линейная однородная система, соответствующая неоднородной системе (1)). Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x); \varphi_2(x); \dots; \varphi_n(x))$ – ф. м. р. с., (1₀). (Тогда

$\tilde{Y} = \Phi(x) \cdot C$, где C – произвольный постоянный вектор, есть общее решение системы (l_0) в (D) .)

Пусть вектор-функция $Y_*(x) = \psi(x)$, $x \in I$, – какое-нибудь решение неоднородной системы (1). Тогда

$$Y = \Phi(x) \cdot C + \psi(x) \quad (2)$$

есть общее решение системы (1) в (D) .

► 1) Берем произвольную точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ и рассматриваем векторное уравнение

$$\begin{aligned} Y_0 &= \Phi(x_0) \cdot C + \psi(x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi(x_0) \cdot C &= Y_0 - \psi(x_0). \end{aligned} \quad (3)$$

(3) – алгебраическая система линейных уравнений относительно компонентов вектора C . Определителем этой системы является $\det \Phi(x_0) \neq 0$. Следовательно, (3) имеет и притом единственное решение $C^{(0)} = \Phi^{-1}(x_0) \cdot (Y_0 - \psi(x_0))$.

2) Подставим в (2) $C^{(0)}$ вместо C . Получим

$$Y = \Phi(x) \cdot C^{(0)} + \psi(x). \quad (4)$$

Убедимся, что (4) является решением системы (1). Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} [\Phi(x) \cdot C^{(0)} + \psi(x)] - A(x) \cdot [\Phi(x) \cdot C^{(0)} + \psi(x)] = \\ &= \frac{d}{dx} [\Phi(x) \cdot C^{(0)}] + \frac{d\psi(x)}{dx} - A(x) \cdot [\Phi(x) \cdot C^{(0)}] - A(x) \cdot \psi(x) = \\ &= \underbrace{\frac{d}{dx} [\Phi(x) \cdot C^{(0)}] - A(x) \cdot [\Phi(x) \cdot C^{(0)}]}_{\equiv 0, \ x \in I} + \underbrace{\frac{d\psi(x)}{dx} - A(x) \cdot \psi(x)}_{\equiv F(x), \ x \in I} \equiv F(x), \quad x \in I. \end{aligned}$$

Показано, таким образом, что (2) удовлетворяет определению общего решения системы (1). ◀

§7. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения решения $Y_*(x) = \psi(x)$ линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть имеется линейная неоднородная система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y + F(x). \quad (1)$$

Тогда

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y \quad (l_0)$$

– линейная однородная система, соответствующая линейной неоднородной системе (1). Пусть $\Phi(x)$ – ф. м. р. с., $(1_0) \Rightarrow Y = \Phi(x) \cdot C$, где C – произвольный постоянный вектор, – общее решение системы (1_0) .

Станем искать решение $Y_*(x) = \Psi(x)$ системы (1) в виде:

$$Y_*(x) = \Phi(x) \cdot C(x), \quad (2)$$

где $C(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ \dots \\ C_n(x) \end{pmatrix}$ – неизвестная (пока) вектор-функция. Хотим, чтобы вектор-

функция (2) была решением системы (1). Но тогда должно быть справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \Phi'(x) \cdot C(x) + \Phi(x) \cdot C'(x) \equiv A(x) \cdot \Phi(x) \cdot C(x) + F(x), \quad x \in I \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \underbrace{[\Phi'(x) - A(x) \cdot \Phi(x)] \cdot C(x)}_{\equiv 0, \quad x \in I} + \Phi(x) \cdot C'(x) \equiv F(x), \quad x \in I \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \Phi(x) \cdot C'(x) \equiv F(x), \quad x \in I \Leftrightarrow C'(x) \equiv \Phi^{-1}(x) \cdot F(x), \quad x \in I \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow C(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt \end{aligned}$$

(произвольный постоянный вектор, который получается в результате интегрирования, можно считать равным 0). Здесь точки $x_0, x \in I = (a, b)$ – любые.

Видим, таким образом, что если в (2) в качестве $C(x)$ брать

$$C(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt, \text{ то вектор-функция}$$

$$Y_*(x) = \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt, \quad x \in I,$$

будет решением системы (1).

Замечание. Общее решение линейной неоднородной системы (1) может быть записано, следовательно, в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot C + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt, \quad x \in I. \quad (3)$$

Пусть требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$Y|_{x=x_0} = Y_0 \quad (\text{точка } (x_0, Y_0) \in (D)). \quad (4)$$

Подстановка в (3) начальных данных (4) дает

$$Y_0 = \Phi(x_0) \cdot C \Rightarrow C = \Phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0.$$

Следовательно, решение задачи Коши (1) – (4) может быть записано в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0 + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt. \quad (5)$$

В частном случае, когда $\Phi(x_0) = E$, последняя формула принимает вид

$$Y = \Phi(x) \cdot Y_0 + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt.$$

Прежде чем приступить к изложению метода интегрирования линейных систем с постоянными коэффициентами, продолжим обзор некоторых сведений из теории матриц, используемых в дальнейшем.

§8. Матричные последовательности и ряды

Пусть имеется последовательность матриц

$$\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (1)$$

(в (1) $A_k = \{a_{ij}^{(k)}\} \ (i, j = \overline{1, n})$). Пусть имеется матрица $A = \{a_{ij}\} \ (i, j = \overline{1, n})$.

Определение. Говорят, что последовательность матриц (1) сходится к матрице A при $k \rightarrow \infty$, и пишут $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$ (или $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$), если $\|A_k - A\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Итак, по определению

$$\left(A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A \right) \Leftrightarrow \left(\|A_k - A\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \right).$$

Мы знаем, что $\|A_k - A\| = \max_{i, j = \overline{1, n}} |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}|$. Поэтому

$$\left(\|A_k - A\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \right) \Leftrightarrow \left(|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \ i, j = \overline{1, n} \right).$$

Следовательно,

$$\left(A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A \right) \Leftrightarrow \left(a_{ij}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a_{ij}, \ i, j = \overline{1, n} \right),$$

т.е. сходимость последовательности матриц (1) эквивалентна одновременной сходимости n^2 числовых последовательностей.

Отметим следующие свойства сходящихся последовательностей матриц.

- 1) Если $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$, то $\|A_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|A\|$.
- 2) Если $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$, $B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B$, то $A_k + B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A + B$.
- 3) Если $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$, $B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B$, то $A_k \cdot B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A \cdot B$.

Установим, например, свойство 3.

► Имеем

$$\begin{aligned}
 A_k B_k - AB &= A_k B_k - A_k B + A_k B - AB = A_k \cdot (B_k - B) + (A_k - A) \cdot B \Rightarrow \\
 \Rightarrow \|A_k B_k - AB\| &\leq \|A_k \cdot (B_k - B)\| + \|(A_k - A) \cdot B\| \leq n \cdot \underbrace{\|A_k\|}_{\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \|A\|} \cdot \underbrace{\|B_k - B\|}_{\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0} + n \cdot \underbrace{\|A_k - A\|}_{\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0} \cdot \|B\| \Rightarrow \\
 \Rightarrow \|A_k B_k - AB\| &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow A_k B_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} AB. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Определение. Пусть $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность матриц. Выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots \quad (2)$$

называется матричным рядом.

Положим

$$\begin{aligned}
 S_1 &= A_1, \\
 S_2 &= A_1 + A_2, \\
 &\dots \dots \dots \\
 S_l &= A_1 + A_2 + \dots + A_l, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

(S_l – l -я частичная сумма матричного ряда (2)). Ясно, что $\{S_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ – последовательность частичных сумм ряда (2).

Если последовательность $\{S_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ сходится к матрице S при $l \rightarrow \infty$, то матричный ряд (2) называется сходящимся, а матрицу S называют суммой матричного ряда (2).

Пишут: $S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

Отметим, что S_l есть матрица с элементами

$$\sum_{k=1}^l a_{ij}^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Следовательно, сходимость матричного ряда (2) означает сходимость n^2 обычных числовых рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Справедливо утверждение:

Пусть имеются два сходящихся матричных ряда

$$(I) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{и} \quad (II) \sum_{k=1}^{\infty} B_k$$

и пусть A и B – суммы рядов (I) и (II) соответственно. Тогда ряд (III) $\sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k)$ тоже сходится и имеет сумму $(A + B)$.

► В самом деле, пусть $S_l^{(I)}$, $S_l^{(II)}$, $S_l^{(III)}$ – l -е частичные суммы рядов (I), (II) и (III) соответственно. Имеем: $S_l^{(III)} = (S_l^{(I)} + S_l^{(II)}) \Rightarrow S_l^{(III)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (A + B)$. ◀

§9. Матричные степенные ряды

Пусть имеется скалярный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (1)$$

Пусть r – радиус сходимости, $f(x)$ – сумма ряда (1). Пусть A – произвольная квадратная матрица порядка n . Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k. \quad (2)$$

($A^0 = E$). Ряд (2) называется степенным рядом от матрицы A . Если ряд сходится, то его сумму условливаемся обозначать через $f(A)$.

Теорема (об условиях сходимости матричного степенного ряда). Пусть имеется скалярный степенной ряд (1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Пусть r – радиус сходимости, $f(x)$ – сумма этого ряда. Рассмотрим ряд (2):

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, где A – произвольная квадратная матрица порядка n . Пусть

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – собственные числа матрицы A . Тогда:

1) если $|\lambda_j| < r$, для любого $j = \overline{1, m}$, то ряд (2) сходится.

2) если имеется хотя бы одно j_0 такое, что $|\lambda_{j_0}| > r$, то ряд (2) расходится.

► I. Рассмотрим сначала случай, когда матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix},$$

где матрица A_j ($j = \overline{1, m}$) имеет размеры $(n_j \times n_j)$ и $\sum_{j=1}^m n_j = n \Rightarrow$

$A = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_m]$. Наряду с рядом (2): $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ рассмотрим ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k \quad (j = \overline{1, m}). \quad (3)$$

Покажем, что ряд (2) сходится лишь тогда, когда сходится каждый из рядов (3) (причем, в случае сходимости: если $f(A)$ – сумма ряда (2), а $f(A_j)$ ($j = \overline{1, m}$) – суммы рядов (3), то $f(A) = \text{diag}[f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m)]$). Для этого рассмотрим l -ю частичную сумму ряда (2). Имеем:

$$\begin{aligned} S_l &= \sum_{k=0}^l a_k A^k = \sum_{k=0}^l a_k \cdot \begin{pmatrix} A_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^l a_k A_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^l a_k A_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^l a_k A_m^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_l(A_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_l(A_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_l(A_m) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$f(A) = \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(A) = \begin{pmatrix} \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(A_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(A_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(A_m) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(A_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(A_m) \end{pmatrix} = \text{diag}[f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m)].$$

II. Допустим, что матрица A_j имеет вид ($j = \overline{1, m}$):

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} - \text{клетка Жордана.}$$

Покажем, что если $|\lambda_j| < r$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k$ сходится, если же $|\lambda_j| > r$, то ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k$ расходится.

Вычислим матрицу A_j^k (для произвольного k). Для этого представим ее в виде:

$$A_j = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}}_{=\lambda_j \cdot E} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_1} = \lambda_j E + E_1.$$

Отметим, что матрица $\lambda_j \cdot E$ коммутирует с любой матрицей (в частности, с матрицей E_1). Поэтому сумму $\lambda_j E + E_1$ можно возводить в степень по формуле бинома Ньютона. Значит,

$$A_j^k = (\lambda_j E + E_1)^k = \lambda_j^k \cdot E + k \cdot \lambda_j^{k-1} \cdot E_1 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot \lambda_j^{k-2} \cdot E_1^2 + \dots + \frac{k(k-1) \dots 1}{k!} E_1^k.$$

Подсчитаем различные степени матрицы E_1 . Имеем:

$$E_1^2 = E_1 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— имеет две первых нулевых строки и два последних нулевых столбца,

$$E_1^3 = E_1 \cdot E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– имеет три первых нулевых строки и три последних нулевых столбца, и т. д. А тогда

$$A_j^k = (\lambda_j E + E_1)^k = \begin{pmatrix} \lambda_j^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k\lambda_j^{k-1} & \lambda_j^k & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_j^{k-2} & k\lambda_j^{k-1} & \lambda_j^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_k^{n_j-1}\lambda_j^{k-(n_j-1)} & \dots & \dots & \dots & \lambda_j^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_j^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(\lambda_j^k)'}{1!} & \lambda_j^k & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(\lambda_j^k)''}{2!} & \frac{(\lambda_j^k)'}{1!} & \lambda_j^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(\lambda_j^k)^{(n_j-1)}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & \lambda_j^k \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$S_l(A_j) = \sum_{k=0}^l a_k A_j^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\left(\sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k\right)'}{1!} & \sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\left(\sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k\right)''}{2!} & \frac{\left(\sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k\right)'}{1!} & \sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\left(\sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k\right)^{(n_j-1)}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & \sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k \end{pmatrix}.$$

Пусть $|\lambda_j| < r$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_j^k$ – сходящийся. Пусть $f(\lambda_j)$ – сумма этого ряда. Но тогда существует

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l(A_j) = f(A_j) = \begin{pmatrix} f(\lambda_j) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & f(\lambda_j) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{f''(\lambda_j)}{2!} & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & f(\lambda_j) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{f^{(n_j-1)}(\lambda_j)}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & f(\lambda_j) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

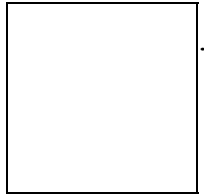
$\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k$ сходится.

Пусть $|\lambda_j| > r$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_j^k$ расходится $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k$ расходится.

III. Пусть теперь A – произвольная матрица размера $n \times n$, J – жорданова форма матрицы A , т.е. $J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$, где

$$\begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица S такая, что $A = S^{-1}JS$ ($\det S \neq 0$, S – матрица подобия; матрицы A и J имеют одинаковые собственные числа). Пусть собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матрицы A удовлетворяют условию: $|\lambda_j| < r$, $j = \overline{1, m}$. Но тогда по доказанному сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_j^k$ при любом $j = \overline{1, m}$, причем этот ряд имеет своей суммой



Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k$ сходится и имеет своей суммой матрицу:

$$f(J) = \text{diag}[f(J_1), f(J_2), \dots, f(J_m)].$$

Но тогда сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ и имеет своей суммой $f(A) = S^{-1} \cdot f(J) \cdot S$. До-

пустим теперь, что имеется j_0 такое, что $|\lambda_{j_0}| > r$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{j_0}^k$ расхо-
дится (по доказанному) $\Rightarrow$ расходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k \Rightarrow$ расходится ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, так как матрица A подобна матрице J . ◀

§10. Экспонента от матрицы

Рассмотрим скалярный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (1)$$

Мы знаем, что радиус сходимости ряда (1) $r = +\infty$ и что сумма ряда (1) $f(x) = e^x$. Рассмотрим матрицу A размером $n \times n$ ($n \geq 1$) и матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (2)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – собственные числа матрицы A . Очевидно, что $|\lambda_j| < r$, $j = \overline{1, m}$. Следовательно, ряд (2) сходится для любой матрицы A .

Положим, по определению,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (3)$$

Найдем поэлементную структуру матрицы e^A .

Пусть $A = S^{-1}JS$, где $J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$ – жорданова форма матрицы A ;

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Имеем:

$$e^A = e^{S^{-1}JS} = S^{-1}e^J S = S^{-1} \cdot \text{diag}[e^{J_1}, \dots, e^{J_m}] \cdot S.$$

Имеем, далее:

$$e^{J_j} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{e^{\lambda_j}}{1!} & e^{\lambda_j} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{e^{\lambda_j}}{2!} & \frac{e^{\lambda_j}}{1!} & e^{\lambda_j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{e^{\lambda_j}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & e^{\lambda_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_j}.$$

Отметим, что собственными числами матрицы e^A являются числа $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_m} \Rightarrow$ матрица e^A – неособенная для любой матрицы A .

§11. Матрица-функция e^{Ax}

Пусть A – произвольная матрица размера $(n \times n)$ ($n \geq 1$), x – скалярная величина. Тогда $A \cdot x$ – матрица размера $(n \times n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!}. \quad (1)$$

Найдем поэлементную структуру матрицы e^{Ax} . $A = S^{-1}JS$, где $J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$; J_j ($j = \overline{1, m}$) – клетка Жордана. Тогда $e^{Ax} = e^{S^{-1}JS \cdot x} = e^{S^{-1} \cdot Jx \cdot S} = S^{-1}e^{Jx}S$, где $e^{Jx} = \text{diag}[e^{J_1x}, e^{J_2x}, \dots, e^{J_mx}]$.

Найдем поэлементную структуру матрицы $e^{J_j x}$. Имеем:

$$e^{J_j x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_j x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} J_j^k, \quad (2)$$

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Составляем частичную сумму ряда (2):

$$S_l(e^{J_j x}) = \sum_{k=0}^l \frac{x^k}{k!} J_j^k = \sum_{k=0}^l \frac{x^k}{k!} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_j^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(\lambda_j^k)'}{1!} & \lambda_j^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(\lambda_j^k)^{(n_j-1)}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & \lambda_j^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^l \frac{(\lambda_j x)^k}{k!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\left(\sum_{k=0}^l \frac{(\lambda_j x)^k}{k!}\right)'}{1!} \lambda_j & \sum_{k=0}^l \frac{(\lambda_j x)^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\left(\sum_{k=0}^l \frac{(\lambda_j x)^k}{k!}\right)^{(n_j-1)}}{(n_j-1)!} \lambda_j & \dots & \dots & \dots & \sum_{k=0}^l \frac{(\lambda_j x)^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Переходя к пределу при $l \rightarrow +\infty$, получим:

$$e^{J_j x} = \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(e^{J_j x}) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j x} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x \cdot e^{\lambda_j x}}{1!} & e^{\lambda_j x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n_j-1} \cdot e^{\lambda_j x}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & e^{\lambda_j x} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Итак, $e^{Jx} = \text{diag}[e^{J_1 x}, e^{J_2 x}, \dots, e^{J_m x}]$, где $e^{J_j x}$ ($j = \overline{1, m}$) – матрица размера $(n_j \times n_j)$, имеющая вид (3).

Найдем выражение для производной от матрицы-функции e^{Ax} . Имеем, по определению:

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{A^k}{k!}}_{=B_k \text{ (обозн.)}} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (B_k)_{ij} x^k \right\}.$$

Видим, что элементами матрицы e^{Ax} являются степенные ряды $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{de^{Ax}}{dx} &= \left\{ \left(\sum_{k=0}^{\infty} (B_k)_{ij} x^k \right)' \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k (B_k)_{ij} x^{k-1} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{A^k}{k!} x^{k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} x^{k-1} = A \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1}}_{=e^{Ax}} = A \cdot e^{Ax}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

§12. Умножение матричных рядов

Пусть имеется матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k. \quad (1)$$

Пусть имеется числовой положительный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k. \quad (2)$$

Если $\|A_k\| \leq a_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то говорят, что ряд (1) *мажорируется* рядом (2).

Справедливо утверждение:

Если матричный ряд (1) мажорируется сходящимся числовым рядом (2), то матричный ряд (1) сходится.

► Рассмотрим l -ю частичную сумму матричного ряда (1):

$$S_l = \sum_{k=0}^l A_k = \left\{ \sum_{k=0}^l a_{ij}^{(k)} \right\}.$$

$\sum_{k=0}^l a_{ij}^{(k)}$ представляет собой произвольный элемент матрицы S_l ($i, j = \overline{1, n}$).

$\sum_{k=0}^l a_{ij}^{(k)}$ является l -й частичной суммой числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, n}). \quad (3)$$

По условию имеем:

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \|A_k\| \leq a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \quad i, j = \overline{1, n}).$$

Видим, что каждый из n^2 рядов (3) мажорируется сходящимся положительным числовым рядом (2) $\Rightarrow$ каждый из n^2 рядов (3) сходится, т.е. $\sum_{k=0}^l a_{ij}^{(k)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} a_{ij}$ (a_{ij} – определенное число, $i, j = \overline{1, n}$) $\Rightarrow S_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \{a_{ij}\} = A \quad (i, j = \overline{1, n}) \Rightarrow$ матричный ряд (1) сходится.

Определение. Пусть имеются матричные ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \quad (4)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \quad (5)$$

(A_k, B_k – квадратные матрицы порядка n). Матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k, \quad (6)$$

где

$$C_k = A_0 B_k + A_1 B_{k-1} + \dots + A_k B_0,$$

называется произведением рядов (4) и (5).

Теорема. Если матричные ряды (4) и (5) мажорируются сходящимися положительными числовыми рядами, то их можно перемножать, т.е. ряд (6) в этом случае сходится, причем если A, B, C – суммы рядов (4), (5) и (6) соответственно, то

$$C = A \cdot B.$$

► Пусть матричные ряды (4) и (5) мажорируются соответственно положительными числовыми рядами

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (\tilde{4})$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k. \quad (\tilde{5})$$

Пусть a – сумма ряда (4), b – сумма ряда (5). Так как (4) и (5) – положительные сходящиеся ряды, то их можно почленно перемножать, т.е. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad (\tilde{6})$$

где $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$, сходится, а его сумма c выражается через суммы рядов (4) и (5) по формуле

$$c = a \cdot b.$$

1) Покажем сначала, что матричный ряд (6) сходится. Имеем для любого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \|C_k\| &= \|A_0 B_k + A_1 B_{k-1} + \dots + A_k B_0\| \leq \|A_0 B_k\| + \|A_1 B_{k-1}\| + \dots + \|A_k B_0\| \leq \\ &\leq n(a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0) = n \cdot c_k \end{aligned}$$

(здесь n – определенное число). У нас ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} n c_k$ – сходится. Видим, что матричный ряд (6) мажорируется числовым положительным сходящимся рядом $\sum_{k=0}^{\infty} n c_k \Rightarrow$ матричный ряд (6) сходится.

2) Покажем теперь, что $C = A \cdot B$. Обозначим через $S_l^{(4)}$, $S_l^{(5)}$ и $S_l^{(6)}$ – l -е частичные суммы матричных рядов (4), (5) и (6) соответственно. Имеем

$$\begin{array}{l} S_l^{(4)} \cdot S_l^{(5)} = \begin{array}{c} \textcircled{A_0 B_0} + \textcircled{A_0 B_1} + \textcircled{A_0 B_2} + \dots + \textcircled{A_0 B_l} + \\ \swarrow C_0 \\ + \textcircled{A_1 B_0} + \textcircled{A_1 B_1} + \textcircled{A_1 B_2} + \dots + \textcircled{A_1 B_l} + \\ \swarrow C_1 \\ + \textcircled{A_2 B_0} + \textcircled{A_2 B_1} + \textcircled{A_2 B_2} + \dots + \textcircled{A_2 B_l} + \\ \swarrow C_2 \\ + \dots + \\ \swarrow C_l \\ + \textcircled{A_l B_0} + \textcircled{A_l B_1} + \textcircled{A_l B_2} + \dots + \textcircled{A_l B_l}. \end{array} \end{array}$$

Видим, что

$$S_l^{(6)} = \sum_{k=0}^l C_k = S_l^{(4)} \cdot S_l^{(5)} - \Delta_l. \quad (7)$$

Здесь Δ_l – матрица порядка n ;

$$\Delta_l = A_1 B_l + A_2 B_{l-1} + \dots + A_l B_1 + A_2 B_l + \dots + A_l B_2 + \dots + A_l B_l$$

(Δ_l – сумма всех матриц, стоящих под диагональю в выражении для $S_l^{(4)} \cdot S_l^{(5)}$).

Обозначим через $S_l^{(\tilde{4})}$, $S_l^{(\tilde{5})}$, $S_l^{(\tilde{6})}$ l -е частичные суммы числовых рядов $(\tilde{4})$, $(\tilde{5})$, $(\tilde{6})$ соответственно. Эти частичные суммы связаны соотношением

$$S_l^{(\tilde{6})} = S_l^{(\tilde{4})} \cdot S_l^{(\tilde{5})} - \tilde{\Delta}_l, \quad (8)$$

где

$$\tilde{\Delta}_l = a_1 b_l + a_2 b_{l-1} + \dots + a_l b_1 + a_2 b_l + \dots + a_l b_2 + \dots + a_l b_l.$$

Перейдем в (8) к пределу при $l \rightarrow \infty$. Получим: $c = a \cdot b - \lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}_l$. Так как $c = ab$,

то $\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}_l = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_l\| &= \|A_1 B_l\| + \|A_2 B_{l-1}\| + \dots + \|A_l B_1\| + \|A_2 B_l\| + \dots + \|A_l B_2\| + \dots + \|A_l B_l\| \leq \\ &\leq n(a_1 b_l + a_2 b_{l-1} + \dots + a_l b_1 + a_2 b_l + \dots + a_l b_2 + \dots + a_l b_l) = n \cdot \tilde{\Delta}_l \\ &\quad (n - \text{определенное число}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\Delta_l\| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \Delta_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0.$$

Перейдем теперь к пределу при $l \rightarrow \infty$ в соотношении (7). Получим $\lim_{l \rightarrow \infty} S_l^{(6)} = A \cdot B - 0 \Rightarrow C = A \cdot B$. ◀

Следствие. Пусть A и B – квадратные матрицы порядка n . Если матрицы A и B коммутируют, то $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

► По определению имеем

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad (9)$$

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}, \quad (10)$$

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!}. \quad (11)$$

1) Покажем, что ряды (9) и (10) можно перемножать. Для этого достаточно убедиться, что каждый из них мажорируется сходящимся положительным числовым рядом. Имеем при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| &= \frac{1}{k!} \|A \cdot A^{k-1}\| \leq \frac{n}{k!} \|A\| \cdot \|A^{k-1}\| = \frac{n}{k!} \|A\| \cdot \|A \cdot A^{k-2}\| \leq \\ &\leq \frac{n^2}{k!} \|A\|^2 \cdot \|A^{k-2}\| \leq \dots \leq \frac{n^{k-1}}{k!} \|A\|^{k-1} \leq \frac{(n\|A\|)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\|A\|)^k}{k!}$ – числовой, положительный, сходящийся; его сумма равна $e^{n\|A\|}$. Он – мажорантный по отношению к матричному ряду (9).

Совершенно аналогично убеждаемся, что матричный ряд (10) мажорируется числовым положительным сходящимся рядом $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\|B\|)^k}{k!}$ ($= e^{n\|B\|}$).

Значит, ряды (9) и (10) можно перемножать. Перемножив матричные ряды (9) и (10), получим

$$e^A \cdot e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{A^0 B^k}{k!} + \frac{A^1}{1!} \cdot \frac{B^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{B^1}{1!} + \frac{A^k}{k!} \cdot B^0 \right)}_{= C_k}. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь общий член ряда (11). Так как матрицы A и B коммутируют, то

$$\begin{aligned} \frac{(A+B)^k}{k!} &= \frac{1}{k!} \left(A^k + kA^{k-1} \cdot B^1 + \frac{k(k-1)}{2!} A^{k-2} \cdot B^2 + \dots + B^k \right) = \\ &= \frac{A^k}{k!} \cdot B^0 + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{B^1}{1!} + \dots + A^0 \cdot \frac{B^k}{k!} = C_k. \end{aligned}$$

Видим, что когда матрицы A и B коммутируют, то ряды (11) и (12) совпадают. Следовательно, $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$. ◀

Частный случай. Пусть $B = -A$. Так как матрицы A и $-A$ коммутируют, то $e^A \cdot e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = E \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$.

§13. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y, \quad (1)$$

где $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $A = \{a_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, n}$), a_{ij} – постоянные вещественные чис-

ла; $x \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема. Матрица-функция

$$\Phi(x) \equiv e^{Ax}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (2)$$

является фундаментальной матрицей решений системы (1).

► 1) Покажем сначала, что $\Phi(x) \equiv e^{Ax} \equiv (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ является матрицей решений системы (1). В самом деле, имеем

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} \equiv \frac{d}{dx} e^{Ax} \equiv A \cdot e^{Ax} \equiv A \cdot \Phi(x). \quad (3)$$

Из (3) следует, что тождественно равны соответствующие элементы матриц $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ и $A \cdot \Phi(x)$, а, следовательно, тождественно равны соответствующие столбцы этих матриц, т.е.

$$\frac{d\varphi_j(x)}{dx} \equiv A \cdot \varphi_j(x), \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (j = \overline{1, n}).$$

Это означает, что $Y = \varphi_j(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ ($j = \overline{1, n}$) – решение системы (1), а матрица-функция $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ – матрица решений системы (1).

2) Покажем теперь, что $\Phi(x) = e^{Ax} = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ – фундаментальная матрица решений системы (1). Для этого вычислим $\det \Phi(x)$ в точке $x = 0$. Имеем

$$\det \Phi(0) = \det e^0 = \det E = 1 \quad (\neq 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно независимы в $(-\infty; +\infty)$. Значит, $\Phi(x) = e^{Ax}$ – ф. м. р. с. (1). ◀

Следствие 1. Пусть точка x_0 – любая из $(-\infty; +\infty)$. Матрица-функция $\tilde{\Phi}(x) = e^{A(x-x_0)}$ есть ф. м. р. с. (1), нормированная в точке $x = x_0$.

► Действительно, имеем: матрица-функция $\Phi(x) = e^{Ax}$ – ф. м. р. с. (1). Матрица $C = e^{-Ax_0}$ – постоянная, неособая. Следовательно, $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) \cdot C = e^{Ax} \cdot e^{-Ax_0}$ – ф. м. р. с. (1). Матрицы Ax и $-Ax_0$ коммутируют. Поэтому $e^{Ax} \cdot e^{-Ax_0} = e^{Ax-Ax_0} = e^{A(x-x_0)} \Rightarrow \tilde{\Phi}(x) = e^{A(x-x_0)}$ – ф. м. р. с. (1).

Имеем, далее, $\tilde{\Phi}(x_0) = e^0 = E$, т.е. $\tilde{\Phi}(x)$ – нормированная в точке $x = x_0$. ◀

Следствие 2. Пусть дана система $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y$ и дано начальное условие

$$Y|_{x=x_0} = Y_0, \quad (4)$$

где x_0 – любое из $\mathbf{R}$, Y_0 – любой из $\mathbf{R}^n$. Решение задачи Коши (1) – (4) дается формулой

$$Y = e^{A(x-x_0)} \cdot Y_0. \quad (5)$$

► Матрица-функция $e^{A(x-x_0)}$ – ф. м. р. с. (1), Y_0 – постоянный вектор. Следовательно, $Y = e^{A(x-x_0)} \cdot Y_0$ – решение системы (1). Имеем:

$Y(x_0) = e^0 \cdot Y_0 = E \cdot Y_0 = Y_0$. Видим, что (5) – решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию (4). ◀

Замечание 1. Формула (5) называется общим решением системы (1) в форме Коши.

Замечание 2 (о группах решений системы (1), соответствующих клеткам Жордана нормальной формы матрицы A). Пусть J – жорданова форма матрицы A :

$$J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m], \quad \text{где} \quad J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Пусть S – неособенная матрица, такая, что

$$A = SJS^{-1}.$$

Было доказано, что

$$\Phi(x) = e^{Ax} = e^{SJS^{-1}x} = S \cdot e^{Jx} \cdot S^{-1}$$

– ф. м. р. с. (1). Но тогда

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot S = S \cdot e^{Jx}$$

– тоже ф. м. р. с. (1). Имеем:

$$\begin{aligned} \Psi(x) = S \cdot e^{Jx} &= S \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_m x} \\ \underbrace{}_{n_1} & \underbrace{}_{n_2} & \dots & \underbrace{}_{n_m} \\ \text{столбцов} & \text{столбцов} & & \text{столбцов} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{n_1 \\ \text{столбцов}}} ; S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ e^{J_2 x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{n_2 \\ \text{столбцов}}} ; \dots ; S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{J_m x} \end{pmatrix}}_{\substack{n_m \\ \text{столбцов}}} \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ из всех решений системы (1), входящих в матрицу $\Psi(x)$, группа решений, соответствующая клетке Жордана J_j , имеет вид

$$S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Выпишем эти группы решений в явном виде.

Для $j = 1$

$$\underbrace{S \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{(Здесь } n_1 \text{ решений)}} = (S_1; S_2; \dots; S_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} & \dots & \dots & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 x}$$

$(S_1, S_2, \dots, S_n)$ – постоянные векторы). Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \left(S_1 + S_2 \cdot x + S_3 \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + S_{n_1} \cdot \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_1 x} = \gamma_1(x) \cdot e^{\lambda_1 x}, \\ \Psi_2(x) &= \left(S_2 + S_3 \cdot x + \dots + S_{n_1} \cdot \frac{x^{n_1-2}}{(n_1-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_1 x} = \gamma_1'(x) \cdot e^{\lambda_1 x}, \\ &\dots \\ \Psi_{n_1}(x) &= S_{n_1} \cdot e^{\lambda_1 x} = \gamma_1^{(n_1-1)}(x) \cdot e^{\lambda_1 x} \end{aligned} \quad (6_1).$$

((6₁) – первая группа решений).

Для $j = 2$:

$$S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ e^{J_2 x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(\text{Здесь } n_2 \text{ решений})}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{n_1+1}(x) &= \left(\mathbf{S}_{n_1+1} + \mathbf{S}_{n_1+2} \cdot x + \mathbf{S}_{n_1+3} \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + \mathbf{S}_{n_1+n_2} \cdot \frac{x^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_2 x} = \gamma_2(x) \cdot e^{\lambda_2 x}, \\ \Psi_{n_1+2}(x) &= \left(\mathbf{S}_{n_1+2} + \mathbf{S}_{n_1+3} \cdot x + \dots + \mathbf{S}_{n_1+n_2} \cdot \frac{x^{n_2-2}}{(n_2-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_2 x} = \gamma_2'(x) \cdot e^{\lambda_2 x}, \\ &\vdots \\ \Psi_{n_1+n_2}(x) &= \mathbf{S}_{n_1+n_2} \cdot e^{\lambda_2 x} = \gamma_2^{(n_2-1)}(x) \cdot e^{\lambda_2 x}\end{aligned}\tag{6_2}$$

Для $j = m$:

$$S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{J_{m^x}} \end{pmatrix}}_{\text{(Здесь } n_m \text{ решений)}}$$

91

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}(x) &= \gamma_m(x) \cdot e^{\lambda_m x}, \\ \Psi_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}(x) &= \gamma'_m(x) \cdot e^{\lambda_m x}, \\ &\vdots \\ \Psi_n(x) &= \gamma_m^{(n_m-1)}(x) \cdot e^{\lambda_m x}. \end{aligned} \tag{6_m}$$

Здесь $\gamma_m(x) = \left(\mathbf{S}_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} + \mathbf{S}_{n_1+\dots+n_{m-1}+2} \cdot x + \dots + \mathbf{S}_n \cdot \frac{x^{n_m-1}}{(n_m-1)!} \right)$; (6_m) — m -я группа решений.

§14. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y + F(x), \quad (1)$$

где $A = \{a_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, n}$; a_{ij} – постоянные вещественные числа); $Y(x)$, $F(x)$ – вектор-функции. Считаем, что $F(x) \in C((a, b))$.

В качестве фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы, соответствующей нашей неоднородной системе, берем матрицу-функцию

$$\Phi(x) = e^{Ax}. \quad (2)$$

Общее решение линейной неоднородной системы записывается, как мы знаем, в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot C + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) F(t) dt. \quad (3)$$

Поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} Y &= e^{Ax} \cdot C + e^{Ax} \cdot \int_{x_0}^x (e^{At})^{-1} \cdot F(t) dt \Rightarrow Y = e^{Ax} \cdot C + e^{Ax} \cdot \int_{x_0}^x e^{-At} \cdot F(t) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow Y = e^{Ax} \cdot C + \int_{x_0}^x e^{Ax} \cdot e^{-At} \cdot F(t) dt = e^{Ax} \cdot C + \int_{x_0}^x e^{A(x-t)} \cdot F(t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Замечание. Если дано начальное условие

$$\mathbf{Y}|_{x=x_0} = \mathbf{Y}_0, \quad (5)$$

где x_0 – любое из (a, b) , Y_0 – любой из $\mathbf{R}^n$, то решение задачи Коши (1) – (5) дается формулой

$$\mathbf{Y} = e^{A(x-x_0)} \cdot \mathbf{Y}_0 + \int_{x_0}^x e^{A(x-t)} \cdot \mathbf{F}(t) dt. \quad (6)$$

В самом деле, подставив начальные данные (5) в (4), получим $Y_0 = e^{Ax_0} \cdot C \Rightarrow C = e^{-Ax_0} \cdot Y_0$. Подставив это выражение для вектора C в (4), получим (6).

Формула (6) называется общим решением линейной неоднородной системы (1) в форме Коши.

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§1. Логарифмы матриц

Определение. Пусть A – квадратная матрица порядка n . Матрицу B называют логарифмом матрицы A и пишут $B = \ln A$, если $A = e^B$.

Справедливы следующие утверждения:

1. если $A = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_m]$ и если существуют $B_j = \ln A_j$, $j = \overline{1, m}$, то существует $B = \ln A$, причем $B = \ln A = \text{diag}[\ln A_1, \ln A_2, \dots, \ln A_m]$;

2. если $A = SJS^{-1}$ ($\det S \neq 0$) и если существует $\ln J$, то существует $\ln A$, причем $\ln A = S \cdot \ln J \cdot S^{-1}$;

3. если матрицы A и B коммутируют, т.е. $A \cdot B = B \cdot A$, и если существуют $\ln A$ и $\ln B$, то существует $\ln(A \cdot B)$, причем $\ln(A \cdot B) = \ln A + \ln B$.

Теорема. Пусть A – неособенная квадратная матрица порядка n . Тогда $B = \ln A$ существует.

► Пусть J – жорданова форма матрицы A . Тогда $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$ ($\det S \neq 0$). Мы докажем, что $\ln A$ существует, если покажем, что существует $\ln J$ (см. утверждение 2).

I. Рассмотрим сначала случай, когда $J = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$. Отметим, что $\lambda_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$), ибо собственные числа матриц A и J совпадают, а матрица A – неособенная. Следовательно, $\ln \lambda_j$ ($j = \overline{1, n}$) существуют, а значит, существует $\ln J$ (см. утверждение 1), причем

$$\ln J = \text{diag}[\ln \lambda_1, \ln \lambda_2, \dots, \ln \lambda_n].$$

II. Рассмотрим теперь более общий случай, а именно случай, когда $J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$, где J_j ($j = \overline{1, m}$) – клетки Жордана. Мы докажем, что $\ln J$ существует и что

$$\ln J = \text{diag}[\ln J_1, \ln J_2, \dots, \ln J_m],$$

если докажем существование $\ln J_j$ для любого $j = \overline{1, m}$. Имеем

$$\begin{aligned}
J_j &= \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} = \\
&= \lambda_j \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{n_j} \text{ (обозначение)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_{n_j} \text{ (обозначение)}} = \\
&= \lambda_j E_{n_j} + B_{n_j} = \lambda_j E_{n_j} \left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j} \right).
\end{aligned}$$

Отметим, что матрица $\lambda_j E_{n_j}$ коммутирует с любой матрицей, в частности, она коммутирует с матрицей $E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}$. По пункту I: $\ln(\lambda_j E_{n_j})$ существует. Следовательно, существование $\ln J_j$ будет доказано, если показать, что существует $\ln \left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j} \right)$, ибо в этом случае

$$\ln J_j = \ln(\lambda_j E_{n_j}) + \ln \left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j} \right).$$

Убедимся, что имеет место равенство

$$\begin{aligned}
\ln \left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j} \right) &= \frac{B_{n_j}}{\lambda_j} - \frac{1}{2\lambda_j^2} B_{n_j}^2 + \frac{1}{3\lambda_j^3} B_{n_j}^3 - \frac{1}{4\lambda_j^4} B_{n_j}^4 + \dots + \\
&\quad + (-1)^{n_j-2} \cdot \frac{1}{(n_j-1)\lambda_j^{n_j-1}} B_{n_j}^{n_j-1} + \dots
\end{aligned} \tag{1}$$

Обозначим через $S \left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j} \right)$ сумму ряда, стоящего в правой части (1). Равенство (1) будет установлено, если удастся показать, что ряд, стоящий в правой части

(1), сходится и что $e^{S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)} = E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}$.

Имеем

$$B_{n_j}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{n_j}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, B_{n_j}^{n_j} = 0.$$

Следовательно, в ряде (1) член $(-1)^{n_j-2} \cdot \frac{1}{(n_j-1)\lambda_j^{n_j-1}} B_{n_j}^{n_j-1}$ – последний, отличный от нулевой матрицы. Значит, ряд, стоящий в правой части (1), сходится. Принимая во внимание выражения для B_{n_j} , $B_{n_j}^2$, $B_{n_j}^3$, ..., легко находим, что

$$S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda_j} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\lambda_j^2} & \frac{1}{\lambda_j} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3\lambda_j^3} & -\frac{1}{2\lambda_j^2} & \frac{1}{\lambda_j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^{n_j-2}}{(n_j-1)\lambda_j^{n_j-1}} & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{2\lambda_j^2} & \frac{1}{\lambda_j} & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем, далее,

$$e^{S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^k =$$

$$= \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^0 + \frac{1}{1!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right] + \frac{1}{2!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^2 + \dots + \frac{1}{(n_j-1)!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^{(n_j-1)} + 0,$$

ибо

$$\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^k = 0 \text{ для } k = n_j, n_j + 1, \dots$$

У матрицы $S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)$ чисто нулевые первая строка и последний столбец; у матрицы

$\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^2$ чисто нулевые две первые строки и два последних столбца, и

т. д. У матрицы $\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^{n_j}$ уже все элементы равны нулю. После простых, но

трудоемких вычислений устанавливается, что

$$\frac{1}{1!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right] + \frac{1}{2!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^2 + \dots + \frac{1}{(n_j-1)!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^{(n_j-1)} = \frac{B_{n_j}}{\lambda_j}.$$

Так как $\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^0 = E_{n_j}$, то получаем

$$e^{S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)} = E_{n_j} + \frac{B_{n_j}}{\lambda_j}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что соотношение (1) верно. Следовательно,

$\ln\left(E_{n_j} + \frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)$ существует, а значит, существует $\ln J_j$ ($j = \overline{1, m}$). ◀

§2. Линейные однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y, \quad (1)$$

где $x \in \mathbf{R}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A(x)$ – матрица-функция размера $(n \times n)$, периодическая с

периодом ω , т.е. $A(x + \omega) \equiv A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Отметим, что

$$A(x + \omega) \equiv A(x), x \in (-\infty, +\infty) \Leftrightarrow a_{ij}(x + \omega) \equiv a_{ij}(x), x \in (-\infty, +\infty), i, j = \overline{1, n}.$$

Теорема 1. Любая фундаментальная матрица $\Phi(x)$ решений системы (1) представима в виде

$$\Phi(x) = p(x) \cdot e^{xR}, \quad (2)$$

где $p(x)$ – периодическая квадратная матрица порядка n с тем же периодом ω , а R – постоянная квадратная матрица порядка n .

► Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ – произвольная ф. м. р. с. (1) $\Rightarrow$ Каждая вектор-функция $Y = \varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$ – решение системы (1). Покажем, что

$$\Phi(x + \omega) = (\varphi_1(x + \omega), \varphi_2(x + \omega), \dots, \varphi_n(x + \omega))$$

– тоже ф. м. р. с. (1).

В самом деле, так как $Y = \varphi_j(x)$ – решение системы (1), то $\varphi'_j(x + \omega) \equiv A(x + \omega) \cdot \varphi_j(x + \omega)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. У нас $A(x)$ – периодическая с периодом $\omega \Rightarrow A(x + \omega) \equiv A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому предыдущее соотношение запишется в виде:

$$\varphi'_j(x + \omega) \equiv A(x) \cdot \varphi_j(x + \omega), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Последнее означает, что вектор-функция $Y = \varphi_j(x + \omega)$ – решение системы (1). Таким образом, если мы составим матрицу

$$\Phi(x + \omega) = (\varphi_1(x + \omega), \varphi_2(x + \omega), \dots, \varphi_n(x + \omega)),$$

то ее столбцы являются решениями системы (1). Значит $\Phi(x + \omega)$ – матрица решений системы (1).

По условию, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ – линейно независимые в промежутке $(-\infty, +\infty) \Rightarrow \varphi_1(x + \omega), \varphi_2(x + \omega), \dots, \varphi_n(x + \omega)$ – линейно независимые в $(-\infty, +\infty) \Rightarrow \Phi(x + \omega)$ – ф. м. р. с. (1). Итак, имеем: $\Phi(x)$ и $\Phi(x + \omega)$ – две фундаментальные матрицы решений системы (1). Но тогда, как мы знаем, существует неособенная постоянная матрица C такая, что $\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot C$.

Матрицу C называют *матрицей монодромии*.

Так как C – неособенная матрица, то существует $\ln C$. Введем в рассмотрение матрицу $R = \frac{1}{\omega} \ln C \Rightarrow C = e^{\omega R}$. Положим далее

$$p(x) = \Phi(x) \cdot e^{-xR}. \quad (3)$$

Из (3) находим $\Phi(x) = p(x) \cdot e^{xR}$. Остается показать теперь, что матрица $p(x)$ – периодическая с периодом ω . Имеем

$$p(x + \omega) \stackrel{(3)}{=} \Phi(x + \omega) \cdot e^{-(x+\omega)R} = \Phi(x) \cdot C \cdot e^{-\omega R} \cdot e^{-xR},$$

ибо матрицы $-\omega R$ и $-xR$ коммутируют.

Так как $Ce^{-\omega R} = e^{\omega R} \cdot e^{-\omega R} = e^0 = E$, то получаем

$$p(x + \omega) = \Phi(x) \cdot e^{-xR} \stackrel{(2)}{=} p(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Значит, матрица $p(x)$ – периодическая с периодом ω . ◀

Заметим еще, что из (3) следует:

1) матрица $p(x)$ – неособенная, ибо $\det p(x) \neq 0$.

2) матрица $p(x)$ – непрерывно дифференцируемая.

§3. Мультипликаторы

Пусть имеется линейная однородная система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y, \quad (1)$$

где $A(x)$ – периодическая матрица-функция с периодом ω . Пусть $\Phi_1(x)$ – какая-нибудь ф. м. р. с. (1). Выше было показано, что $\Phi_1(x + \omega)$ – тоже ф. м. р. с. (1). Но тогда

$$\Phi_1(x + \omega) = \Phi_1(x) \cdot C_1 \quad (2)$$

(C_1 – матрица монодромии, $\det C_1 \neq 0$). Пусть $\Phi(x)$ – некоторая другая ф. м. р. с. (1). Тогда и $\Phi(x + \omega)$ – тоже ф. м. с. р. (1), причем

$$\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot C \quad (3)$$

(C – матрица монодромии, $\det C \neq 0$).

Найдем связь между матрицами C_1 и C . У нас $\Phi_1(x)$ и $\Phi(x)$ – ф. м. р. с. (1). Поэтому существует неособенная постоянная матрица T такая, что

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) \cdot T \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi_1(x + \omega) &= \Phi(x + \omega) \cdot T \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \Phi(x + \omega) \cdot T = \Phi_1(x) \cdot C_1 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \Phi(x + \omega) \cdot T = \Phi(x) \cdot T \cdot C_1. \end{aligned}$$

Умножим обе части последнего равенства на матрицу T^{-1} справа. Получим

$$\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot T \cdot C_1 \cdot T^{-1}. \quad (5)$$

Но, с другой стороны, мы имеем (см. (3))

$$\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot C.$$

Так как матрица C – единственная, то из (5) и (3) следует, что

$$C = T \cdot C_1 \cdot T^{-1}. \quad (6)$$

Последнее означает, что матрицы C и C_1 – подобные.

Общий вывод: все матрицы монодромии для данной системы (1) являются подобными.

Известно, что собственные числа подобных матриц одни и те же. Следовательно, справедливо утверждение: *собственные числа любой из матриц монодромии для данной системы (1) не зависят от выбора ф. м. р. с. (1).*

Определение. Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ – собственные числа матрицы монодромии C . Эти числа называются *мультипликаторами системы (1)*.

У нас $R = \frac{1}{\omega} \ln C$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – собственные числа матрицы R . Ясно, что $\lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln \mu_j$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ называются *характеристическими показателями системы (1)*.

Заметим, что:

- 1) если $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, то для соответствующего мультипликатора μ_j будет $|\mu_j| < 1$;
- 2) если $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, то $|\mu_j| > 1$.

§4. Структура фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы с периодическими коэффициентами

Было показано, что ф. м. р. с.

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y, \quad (1)$$

где $A(x + \omega) \equiv A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, представима в виде

$$\Phi(x) = p(x) \cdot e^{xR}. \quad (2)$$

В (2) $p(x)$ – периодическая с периодом ω , неособенная, непрерывно дифференцируемая квадратная матрица порядка n ; $R = \frac{1}{\omega} \ln C$ (C – матрица монодромии).

Пусть J – жорданова форма матрицы R . Значит, существует матрица S такая, что $R = S \cdot J \cdot S^{-1}$. Имеем

$$\Phi(x) = p(x) e^{xR} = p(x) e^{SJS^{-1}x} = p(x) \cdot S \cdot e^{Jx} \cdot S^{-1}.$$

Умножив обе части последнего матричного равенства на S справа, получим

$$\underbrace{\Phi(x) \cdot S}_{=\Psi(x)} = \underbrace{p(x) \cdot S}_{=p^*(x) \text{ (обозначение)}} \cdot e^{Jx} = p^*(x) e^{Jx}.$$

Отметим, что $\Psi(x) = \Phi(x) \cdot S$ является ф. м. р. с. (1), а $p^*(x)$ – матрица, обладающая теми же свойствами, что и $p(x)$ ($p^*(x)$ – периодическая с периодом ω , неособенная, непрерывно дифференцируемая).

Итак,

$$\Psi(x) = p^*(x) \cdot e^{Jx}. \quad (3)$$

Если выясним структуру матрицы $\Psi(x)$, то тем самым узнаем структуру ф. м. р. с. (1).

Имеем

$$\Psi(x) = p^*(x) \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_m x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^*(x) \underbrace{\begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{n_1 \text{ столбцов}}; \dots; p^*(x) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{J_m x} \end{pmatrix}}_{n_m \text{ столбцов}} \end{pmatrix}.$$

Каждой клетке Жордана J_j ($j = \overline{1, m}$) соответствует группа решений, входящих в матрицу $\Psi(x)$. Выпишем эти группы решений в явном виде.

Первая группа ($j = 1$):

$$\begin{aligned} p^*(x) \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} &= \underbrace{(p_1, p_2, \dots, p_n)}_{=p^*(x)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} & \dots & \dots & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \Psi_1(x) = \left(p_1(x) + p_2(x) \cdot x + p_3(x) \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + p_{n_1}(x) \cdot \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_1 x}, \\ \Psi_2(x) = \left(p_2(x) + p_3(x) \cdot x + \dots + p_{n_1}(x) \cdot \frac{x^{n_1-2}}{(n_1-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_1 x}, \\ \dots \\ \Psi_{n_1}(x) = p_{n_1}(x) \cdot e^{\lambda_1 x}. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n_1}(x)$ – периодические вектор-функции с периодом ω .

Вторая группа решений ($j = 2$):

$$p^*(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{J_2 x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Psi_{n_1+1}(x) = \left(p_{n_1+1}(x) + p_{n_1+2}(x) \cdot x + \dots + p_{n_1+n_2}(x) \cdot \frac{x^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_2 x}, \\ \Psi_{n_1+2}(x) = \left(p_{n_1+2}(x) + p_{n_1+3}(x) \cdot x + \dots + p_{n_1+n_2}(x) \cdot \frac{x^{n_2-2}}{(n_2-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_2 x}, \\ \dots \\ \Psi_{n_1+n_2}(x) = p_{n_1+n_2}(x) \cdot e^{\lambda_2 x}, \end{cases}$$

и так далее; m -я группа решений ($j = m$):

$$p^*(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{J_m x} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Psi_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}(x) = \left(p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}(x) + p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}(x) \cdot x + \dots + \right. \\ \left. + p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+n_m}(x) \cdot \frac{x^{n_m-1}}{(n_m-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_m x}, \\ \Psi_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}(x) = \left(p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}(x) + p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+3}(x) \cdot x + \dots + \right. \\ \left. + p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+n_m}(x) \cdot \frac{x^{n_m-2}}{(n_m-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_m x}, \\ \dots \\ \Psi_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+n_m}(x) = \Psi_n(x) = p_{n_1+n_2+\dots+n_m}(x) \cdot e^{\lambda_m x}. \end{cases}$$

$Y = \Psi(x) \cdot C = C_1 \cdot \Psi_1(x) + C_2 \cdot \Psi_2(x) + \dots + C_n \cdot \Psi_n(x)$ – общее решение системы (1).

Отметим, что:

1) если $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для любого $j = \overline{1, m}$, то все решения системы (1) стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$;

2) если имеется хотя бы одно характеристическое число λ_{j_0} такое, что $\operatorname{Re} \lambda_{j_0} > 0$, то существуют решения системы (1), стремящиеся к бесконечности при $x \rightarrow +\infty$.

Замечание. Пусть $\Phi(x)$ – ф. м. р. с. (1), нормированная в точке $x = 0$, то есть такая, что $\Phi(0) = E$. Построим по ней матрицу монодромии C . Мы знаем, что $\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot C$. Положив в этом соотношении $x = 0$, получим

$$\Phi(\omega) = \underbrace{\Phi(0)}_{=E} \cdot C \Rightarrow C = \Phi(\omega).$$

Видим, что в этом случае мультипликаторы системы (1) будут найдены, если мы найдем собственные числа матрицы $\Phi(\omega)$.

По формуле Остроградского – Лиувилля имеем

$$W(x) = \det \Phi(x) = \det \Phi(0) \cdot e^{\int_0^x \operatorname{tr} A(t) dt},$$

где $\det \Phi(0) = 1$, так как $\Phi(x)$ – нормированная в точке $x = 0$. Поэтому

$$\det \Phi(\omega) = e^{\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t) dt}.$$

Мы знаем, что определитель любой матрицы равен произведению собственных чисел этой матрицы. Следовательно,

$$\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n = \det \Phi(\omega) = e^{\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t) dt}.$$

Если прологарифмировать это соотношение, то получим:

$$\begin{aligned} \ln \mu_1 + \ln \mu_2 + \dots + \ln \mu_n &= \int_0^\omega \operatorname{tr} A(t) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \operatorname{tr} A(t) dt. \end{aligned}$$

§5. Приведение линейной однородной системы с периодическими коэффициентами к линейной однородной системе с постоянными коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y, \quad (1)$$

где $A(x) \in C(\mathbf{R})$ и такая, что $A(x + \omega) = A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Мы знаем, что любая фундаментальная матрица решений $\Phi(x)$ системы (1) представима в виде:

$$\Phi(x) = p(x) \cdot e^{Rx}, \quad (2)$$

где $p(x)$ – неособая, периодическая матрица с периодом ω ; R – постоянная матрица. Отметим, что поскольку $\Phi(x)$ – матрица решений системы (1), то

$$\Phi'(x) \equiv A(x) \cdot \Phi(x). \quad (3)$$

Произведем в системе (1) замену переменных по формуле

$$Y = p(x) \cdot Z, \quad (4)$$

где $p(x)$ – матрица из (2). Подставив (4) в (1), получим:

$$p'(x) \cdot Z + p(x) \cdot Z' = A(x) \cdot p(x) \cdot Z \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(x)Z' &= [A(x) \cdot p(x) - p'(x)] \cdot Z \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dZ}{dx} &= p^{-1}(x)[A(x) \cdot p(x) - p'(x)] \cdot Z. \end{aligned} \quad (5)$$

Найдем выражение для $p'(x)$. Для этого подставим выражение для матрицы $\Phi(x)$ в виде (2) в соотношение (3). Будем иметь:

$$p'(x)e^{Rx} + p(x) \cdot R \cdot e^{Rx} \equiv A(x) \cdot p(x)e^{Rx}.$$

Умножив обе части последнего тождества на e^{-Rx} справа, получим $p'(x) = A(x) \cdot p(x) - p(x) \cdot R$. Подставив полученное выражение для $p'(x)$ в (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dx} &= p^{-1}(x)[A(x) \cdot p(x) - A(x) \cdot p(x) + p(x) \cdot R] \cdot Z \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dZ}{dx} &= p^{-1}(x)p(x)R \cdot Z \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = R \cdot Z. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как R – постоянная матрица, то (6) – линейная однородная система с постоянными коэффициентами.

ГЛАВА 4. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Постановка задачи об устойчивости. Определения

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y) \quad (1)$$

с начальным условием

$$Y|_{t=t_0} = \xi_0, \quad (2)$$

описывающая некоторый реальный процесс, неизбежно описывает его лишь приближенно. Дело в том, что система дифференциальных уравнений составляется при некоторых упрощающих действительные зависимости предположениях, а начальные данные, являющиеся обычно результатом некоторых измерений, вычисляются с погрешностью. Поэтому обычно лишь только те решения системы (1) могут хотя бы приближенно описывать изучаемый процесс, которые при $t \geq t_0$ мало изменяются при малом изменении правой части системы (1) и при малом изменении начальных данных (2).

Теория устойчивости изучает условия, при которых малые изменения вектор-функции $F(t, Y)$ или малые изменения начальных данных приводят лишь к малому изменению решений при $t \geq t_0$. Мы ограничимся здесь рассмотрением

только второй из этих задач.

Рассмотрение будем вести при предположениях, что

1) $F(t, Y) \in C(G)$;

2) $F(t, Y) \in \text{Lip}_Y(G)$ – локально; $(G) = (\tau, +\infty) \times (D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^n$, $\tau \geq -\infty$.

Часто в дальнейшем будем называть независимую переменную t временем, каждое решение $Y(t)$ системы (1) – движением, а график этого движения – траекторией.

Пусть $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ – решение задачи (1) – (2). Будем считать, что это решение определено для $t \in (\tau_0, +\infty)$, $\tau \leq \tau_0 < t_0 < +\infty$; t_0, ξ_0 – любые, но такие, что точка $(t_0, \xi_0) \in (G)$.

Было отмечено, что начальные данные вычисляются с некоторой погрешностью, а потому вместо (2) будем иметь приближенное начальное условие

$$Y|_{t=t_0} = \xi, \text{ где } \xi = \xi_0 + \Delta\xi; (t_0, \xi) \in (G). \quad (\tilde{2})$$

Начальным условием $(\tilde{2})$ определяется некоторое другое движение системы (1): $Y = \varphi(t) = \varphi(t, t_0, \xi)$. Считаем, что и это движение определено для $t \in (\tau_0, +\infty)$. Вопрос об устойчивости (неустойчивости) движения $Y = \varphi_0(t)$, $t \in (\tau_0, +\infty)$, в смысле А.М. Ляпунова сводится к вопросу о влиянии ошибок в начальных данных на движение во все последующие моменты времени. Если оказывается, что малые ошибки в начальных данных обуславливают также малые ошибки во все последующие моменты времени, то говорят, что движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in (\tau_0, +\infty)$, устойчиво в смысле А.М. Ляпунова. В противном случае говорят, что это движение неустойчиво в смысле А.М. Ляпунова.

Рассмотрим два простейших примера.

Пример 1. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} + y = 1 + t. \quad (1^*)$$

Оно определено на всей плоскости переменных t и y , причем каждая точка этой плоскости оказывается точкой единственности. Общим решением уравнения (1^*) является функция

$$y = Ce^{-t} + t. \quad (2^*)$$

Из (2^*) выделим решение уравнения (1^*) , удовлетворяющее начальному условию $y|_{t=0} = \xi_0$. Таким решением будет функция $y = \varphi_0(t, 0, \xi_0) = \xi_0 e^{-t} + t$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Станем рассматривать это решение на промежутке $[0, +\infty)$.

Выделим теперь из (2^*) решение уравнения (1^*) , удовлетворяющее начальному условию $y|_{t=0} = \xi$, где $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$, $\Delta\xi \neq 0$. Таким решением будет функция $y = \varphi(t, 0, \xi) = \xi e^{-t} + t$, $t \in (-\infty, +\infty)$. И это решение станем рассматривать на

промежутке $[0, +\infty)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ любое, сколь угодно малое, и рассмотрим разность $\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, \xi_0)$. Имеем:

$$\begin{aligned}\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, \xi_0) &= (\xi e^{-t} + t) - (\xi_0 e^{-t} + t) = (\xi - \xi_0) e^{-t} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, \xi_0)| &= |\xi - \xi_0| e^{-t} \leq |\xi - \xi_0| \text{ для всех } t \in [0, +\infty) \Rightarrow \\ \Rightarrow |\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, \xi_0)| &< \varepsilon \text{ для всех } t \in [0, +\infty),\end{aligned}$$

если число ξ брать любым, удовлетворяющим условию $|\xi - \xi_0| < \delta$, где $\delta = \varepsilon$.

В этом примере малые ошибки в начальных данных обуславливают малые ошибки во все последующие моменты времени. Более того, эти ошибки быстро убывают с увеличением t . Заметим еще, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, \xi_0)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\xi - \xi_0| e^{-t} = 0$$

(т.е. решения, близкие по начальным значениям, неограниченно сближаются с возрастанием t).

Пример 2. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \sin^2 y. \quad (3^*)$$

Оно определено на всей плоскости переменных t и y ; каждая точка этой плоскости оказывается точкой единственности уравнения (3*).

Уравнение (3*) имеет очевидные решения: $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Пусть $y \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Тогда уравнение (3*) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = dt \Rightarrow \operatorname{ctg} y = -(t + C). \quad (4^*)$$

Рассмотрим решение уравнения (3*), удовлетворяющее условию $y|_{t=0} = 0$. Этим решением будет $y = \varphi_0(t, 0, 0) \equiv 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Станем рассматривать это решение на промежутке $[0, +\infty)$ (рис. 2).

Из (4*) выделим решение уравнения (3*), удовлетворяющее начальному условию $y|_{t=0} = \xi$, $\xi \in (0, \pi)$. Таким решением будет функция, определяемая соотношением $\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} \xi - t$, а именно

(рис. 1):

$$\begin{aligned}y = \varphi(t, 0, \xi) &= \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} \xi - t), \\ t &\in (-\infty, +\infty).\end{aligned}$$

И это решение будем рассматривать на промежутке $[0, +\infty)$.

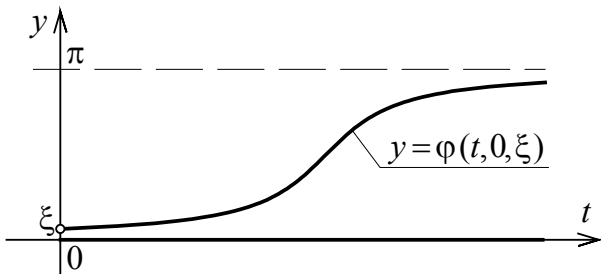


Рис. 2.

Для разности решений имеем:

$$\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, 0) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} \xi - t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} [\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, 0)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \xi - t) = \pi.$$

Здесь уже не всякому $\varepsilon > 0$ будет отвечать $\delta > 0$ такое, чтобы из неравенства $|\xi - 0| < \delta$ следовало бы неравенство $|\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, 0)| < \varepsilon$. Значит, существует $\varepsilon_0 > 0$, которому не отвечает никакое $\delta > 0$ в указанном выше смысле и, следовательно, для любого $\delta > 0$ существуют $\tilde{\xi}$, удовлетворяющее условию $|\tilde{\xi} - 0| < \delta$, и $\tilde{t} \in [0, +\infty)$ такие, что $|\varphi(\tilde{t}, 0, \tilde{\xi}) - \varphi_0(\tilde{t}, 0, 0)| \geq \varepsilon_0$.

Дадим теперь точные определения устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости движения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1).

Определение 1. Движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого вектора ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - \xi_0\| < \delta$, движение системы (1) $Y = \varphi(t) = \varphi(t, t_0, \xi)$ определено на промежутке $[t_0, +\infty)$ и имеет место неравенство

$$\|\varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)\| < \varepsilon \text{ для любого } t \in [t_0, +\infty).$$

В противном случае движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, называется *неустойчивым по Ляпунову*. Иными словами, движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, называется неустойчивым по Ляпунову, если для любого $\delta > 0$ существуют вектор $\tilde{\xi}$, удовлетворяющий условию $\|\tilde{\xi} - \xi_0\| < \delta$, и $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такие, что $\|\varphi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\xi}) - \varphi_0(\tilde{t}, t_0, \xi_0)\| \geq \varepsilon$.

Определение 2. Движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, называется *асимптотически устойчивым (по Ляпунову)*, если 1) $\varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ устойчиво (по Ляпунову) и если 2) существует $\delta' > 0$ такое, что для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - \xi_0\| < \delta'$, оказывается

$$\|\varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Замечание. Допустим, что существует точка $Y_0 \in (D)$, такая, что для любого $t \in (\tau_0, +\infty)$ оказывается $F(t, Y_0) = 0$. Тогда система (1) допускает движение $Y = Y_0$, $t \in (\tau_0, +\infty)$. Такое движение называется состоянием покоя. Его траекторией является точка Y_0 (точка Y_0 — точка покоя). Отметим, что вопрос об устойчивости произвольного движения $\varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) может быть сведен к вопросу об устойчивости состояния покоя некоторой другой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Действительно, произведем в системе (1) замену

$$Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X. \quad (3)$$

Получим

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{d\varphi_0(t, t_0, \xi_0)}{dt}}_{\equiv F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0))} + \frac{dX}{dt} = F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{dX}{dt} = F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X) - F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0)) \underset{\text{обозн.}}{=} \tilde{F}(t, X) \Rightarrow \\
& \frac{dX}{dt} = \tilde{F}(t, X). \tag{4}
\end{aligned}$$

В силу замены (3) решению $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы (1) соответствует решение $X \equiv 0$ системы (4) (движение $X \equiv 0$, $t \in (\tau_0, +\infty)$ – состояние покоя системы (4)), а решению $Y = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы (1) соответствует решение $X = \varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0) \underset{\text{обозн.}}{=} \psi(t, t_0, \eta)$ системы (4). Ясно, что

$$\eta = \psi(t, t_0, \eta) \Big|_{t=t_0} = \varphi(t, t_0, \xi) \Big|_{t=t_0} - \varphi_0(t, t_0, \xi_0) \Big|_{t=t_0} = \xi - \xi_0.$$

Покажем, что если решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво, то и решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (4) будет соответственно 1) устойчивым, 2) неустойчивым, 3) асимптотически устойчивым.

► 1) Пусть решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво. Тогда любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - \xi_0\| < \delta$, движение $Y = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы (1) определено на промежутке $t \in [t_0, +\infty)$ и имеет место неравенство $\|\varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)\| < \varepsilon$ для любого $t \in [t_0, +\infty)$. А это неравенство равносильно тому, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого η , удовлетворяющего условию $\|\eta - 0\| < \delta$, движение $X = \psi(t, t_0, \eta)$ системы (4) определено на промежутке $[t_0, +\infty)$ и имеет место неравенство $\|\psi(t, t_0, \eta) - 0\| < \varepsilon$ для любого $t \in [t_0, +\infty)$. Последнее означает, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (4) устойчиво.

2) Пусть решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) неустойчиво. Но тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существуют $\tilde{\xi}$, удовлетворяющее условию $\|\tilde{\xi} - \xi_0\| < \delta$, и $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такие, что будет $\|\varphi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\xi}) - \varphi_0(\tilde{t}, t_0, \xi_0)\| \geq \varepsilon$. А это равносильно тому, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существуют $\tilde{\eta}$, удовлетворяющее условию $\|\tilde{\eta} - 0\| < \delta$, и $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такие, что будет $\|\psi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\eta}) - 0\| \geq \varepsilon$. Последнее означает, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (4) неустойчиво.

3) Пусть решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) асимптотически устойчиво. Это означает, что 1) решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, устойчи-

во и что 2) существует $\delta' > 0$ такое, что для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - \xi_0\| < \delta'$, будет

$$\|\varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Но тогда 1) решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (4) устойчиво и 2) существует $\delta' > 0$ такое, что для любого η , удовлетворяющего условию $\|\eta - 0\| < \delta'$, будет

$$\|\psi(t, t_0, \eta) - 0\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Значит, решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (4) асимптотически устойчиво. ◀

§ 2. Устойчивость линейных систем

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dY}{dt} = A(t) \cdot Y + F(t), \quad (1)$$

где матрица-функция $A(t)$ и вектор-функция $F(t)$ предполагаются непрерывными на промежутке $(\tau, +\infty)$. Заметим, что в этом случае область $(G) = (\tau, +\infty) \times \mathbf{R}^n$ и решения системы (1) существуют на всем промежутке $(\tau, +\infty)$. Покажем, что исследование на устойчивость произвольного решения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы (1) сводится к исследованию на устойчивость решения $Y = 0$ соответствующей однородной системы

$$\frac{dY}{dt} = A(t) \cdot Y, \quad (2)$$

а именно, покажем, что справедливо утверждение:

Произвольное решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ линейной неоднородной системы (1): 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда решение $Y = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$ соответствующей однородной системы (2) соответственно 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво.

► В системе (1) произведем замену, положив

$$Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X. \quad (3)$$

(X – новая искомая вектор-функция). Получим:

$$\frac{d\varphi_0(t, t_0, \xi_0)}{dt} + \frac{dX}{dt} = A(t)[\varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X] + F(t).$$

Так как $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, – решение системы (1), то

$$\frac{d\varphi_0(t, t_0, \xi_0)}{dt} = A(t) \cdot \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + F(t), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Но тогда

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X. \quad (\tilde{2})$$

В силу замены (3) решению $Y = \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы (1) соответствует решение $X \equiv 0$ системы $(\tilde{2})$, а любому другому решению $Y = \Phi(t, t_0, \xi)$ системы (1) соответствует решение $X = \Psi(t, t_0, \eta) = \Phi(t, t_0, \xi) - \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы $(\tilde{2})$, причем $\Psi(t, t_0, \eta)|_{t=t_0} = \eta = \xi - \xi_0$.

Совершенно аналогично тому, как это было сделано в конце §1, устанавливается, что если решение $Y = \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1) 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво, то решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ соответственно 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво.

Покажем, что справедливо и обратное утверждение, а именно: если решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво, то решение $Y = \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) соответственно 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво. Действительно:

1) Пусть решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво. Нужно показать, что тогда устойчиво и решение $Y = \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1). Рассуждаем от противного. Допустим, что решение $Y = \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) неустойчиво. Но тогда, как показано выше, будет неустойчиво решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$, а это не так.

2) Пусть решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ неустойчиво. Нужно показать, что тогда неустойчиво и решение $Y = \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1). Рассуждаем от противного. Допустим, что решение $Y = \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво. Но тогда, как показано выше, будет устойчивым и решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$, а это не так.

3) Пусть решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. Нужно показать, что тогда асимптотически устойчиво и решение $Y = \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1). Рассуждаем от противного. Допустим, что решение $Y = \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво, но не асимптотически (устойчивость решения $Y = \Phi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы (1) следует из устойчивости решения $X \equiv 0$ системы $(\tilde{2})$, см. пункт 1)). Но тогда из доказательства, проведенного выше, будет следовать лишь устойчивость (не асимптотическая) решения $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$, а это не так. ◀

Важно выяснить теперь: при каких условиях решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, линейной однородной системы $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X$ будет 1) устойчивым и 2) асим-

птотически устойчивым? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. Пусть имеется линейная однородная система

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X. \quad (\tilde{2})$$

Пусть $\Phi_0(t)$ – ф.м.р.с. $(\tilde{2})$, нормированная в некоторой точке $t_0 \in (\tau, +\infty)$, т.е. $\Phi_0(t)|_{t=t_0} = E$. Решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$:

1) устойчиво лишь тогда, когда $\Phi_0(t)$ – ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$;

2) асимптотически устойчиво лишь тогда, когда $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Докажем утверждение 1).

Необходимость. Дано: решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, устойчиво. Требуется доказать, что $\Phi_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ – ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$.

► Рассуждаем от противного, а именно, предполагаем, что $\Phi_0(t)$ не является ограниченной на промежутке $[t_0, +\infty)$. Но тогда существует по крайней мере одно j_0 такое, что решение $\varphi_{j_0}(t)$ не является ограниченным на промежутке $[t_0, +\infty)$ (j_0 – одно из чисел $1, 2, \dots, n$). Покажем теперь, что неограниченность решения $\varphi_{j_0}(t)$ приводит к тому, что решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ неустойчиво. Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon_0 > 0$ и закрепим его. Пусть $\delta > 0$ – любое, сколь угодно малое. Возьмем число Δ , удовлетворяющее условию $0 < \Delta < \delta$, и рассмотрим решение системы $(\tilde{2})$: $X = \varphi(t) = \varphi_{j_0}(t) \cdot \Delta$. Имеем $\|\varphi(t)\| = \Delta \cdot \|\varphi_{j_0}(t)\|$. Так как $\|\varphi_{j_0}(t)\|$ неограниченна на промежутке $[t_0, +\infty)$, то и $\|\varphi(t)\|$ неограниченна на $[t_0, +\infty)$. Следовательно, существует $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$ такое, что $\|\varphi(\tilde{t})\| \geq \varepsilon_0$.

Имеем, далее, $\tilde{\xi} = \varphi(t)|_{t=t_0} = \varphi_{j_0}(t_0) \cdot \Delta = e_{j_0} \cdot \Delta$, где e_{j_0} – матрица-столбец, у которой все элементы, кроме одного (равного единице), равны нулю. Поэтому $\|\varphi(t_0)\| = \|e_{j_0} \cdot \Delta\| = 1 \cdot \Delta = \Delta$, т.е. $\|\tilde{\xi}\| = \Delta < \delta$. Таким образом, получили: существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существуют $\tilde{\xi}$, удовлетворяющее условию $\|\tilde{\xi}\| = \|\tilde{\xi} - \mathbf{0}\| < \delta$, и $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такие, что

$$\|\varphi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\xi})\| = \|\varphi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\xi}) - \mathbf{0}\| \geq \varepsilon_0.$$

Последнее означает, что решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ неустойчиво. У нас же, по условию, решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, устойчиво. Получили про-

тиворечие. Значит, предположение, что $\Phi_0(t)$ – неограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$, неверно. ◀

Достаточность. Дано: $\Phi_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ – ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$. Требуется доказать, что решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво.

► По условию, $\Phi_0(t)$ – ограниченная на $[t_0, +\infty)$. $\Rightarrow$ Существует число $M > 0$ такое, что $\|\Phi_0(t)\| \leq M$, $t \in [t_0, +\infty)$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и произвольный вектор $\xi \in \mathbf{R}^n$. Отметим, что $X = \Phi_0(t) \cdot \xi$ – решение системы $(\tilde{2})$, удовлетворяющее начальному условию $X|_{t=t_0} = \xi$ ($\Phi_0(t) \cdot \xi = \varphi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, +\infty)$).

Имеем

$$\|\varphi(t, t_0, \xi) - \mathbf{0}\| = \|\varphi(t, t_0, \xi)\| = \|\Phi_0(t) \cdot \xi\| \leq n \cdot \|\Phi_0(t)\| \cdot \|\xi\| \leq n \cdot M \cdot \|\xi\|, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Отсюда видим, что $\|\varphi(t, t_0, \xi) - \mathbf{0}\| < \varepsilon$, если $\|\xi - \mathbf{0}\| = \|\xi\| < \frac{\varepsilon}{nM}$. Таким образом,

получаем: любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ ($\delta = \frac{\varepsilon}{nM}$) такое, что для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - \mathbf{0}\| < \delta$, оказывается $\|\varphi(t, t_0, \xi) - \mathbf{0}\| < \varepsilon$ для любого $t \in [t_0, +\infty)$. Последнее означает, что решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво. ◀

Докажем теперь утверждение 2).

Необходимость. Дано: решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. Требуется доказать, что $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

► По условию, решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. Это означает, что решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, устойчиво и что существует $\delta' > 0$ такое, что для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - \mathbf{0}\| = \|\xi\| < \delta'$, оказывается $\|\varphi(t, t_0, \xi) - \mathbf{0}\| = \|\varphi(t, t_0, \xi)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Мы докажем, что $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, если покажем, что для любого $j = \overline{1, n}$: $\|\varphi_j(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. (У нас $\Phi_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$).

Возьмем любое решение $X = \varphi_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, входящее в матрицу $\Phi_0(t)$. Возьмем $\Delta > 0$ – любое, но такое, что $\Delta < \delta'$, и рассмотрим решение $\varphi(t) = \varphi_j(t) \cdot \Delta$, $t \in [t_0, +\infty)$. Имеем $\xi = \varphi(t_0) = \varphi_j(t_0) \cdot \Delta = e_j \cdot \Delta$, где e_j – матрица-столбец, у которой все элементы, кроме одного (равного единице), равны нулю. Поэтому $\|\varphi(t_0)\| = \Delta < \delta'$, т.е. $\|\xi\| < \delta'$. А тогда, в силу асимптотической устойчивости решения $X = \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, будем иметь

$$\|\varphi(t)\| = \|\varphi(t, t_0, \xi)\| = \|\varphi(t, t_0, \xi) - \mathbf{0}\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \|\varphi_j(t) \cdot \Delta\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 &\Leftrightarrow \|\varphi_j(t)\| \cdot \Delta \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|\varphi_j(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 &\text{ при любом } j = \overline{1, n} \Rightarrow \|\Phi_0(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Достаточность. Дано: $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Требуется доказать, что решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво.

► По условию, $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Тогда $\|\Phi_0(t)\|$ – ограничена на промежутке $[t_0, +\infty)$, следовательно, по утверждению 1) теоремы, решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво.

Возьмем произвольный вектор $\xi \in \mathbf{R}^n$ и рассмотрим решение $\Phi_0(t) \cdot \xi = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы $(\tilde{2})$. Имеем:

$$\|\varphi(t, t_0, \xi) - \mathbf{0}\| = \|\varphi(t, t_0, \xi)\| = \|\Phi_0(t) \cdot \xi\| \leq n \cdot \|\Phi_0(t)\| \cdot \|\xi\|.$$

По условию $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. А тогда из предыдущего неравенства следует, что

$\|\varphi(t, t_0, \xi) - \mathbf{0}\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Таким образом, получили, что решение $X \equiv \mathbf{0}$,

$t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво и что для любого $\xi \in \mathbf{R}^n$ оказывается $\|\varphi(t, t_0, \xi) - \mathbf{0}\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Это означает, что решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. ◀

§3. Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами

Пусть имеется линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y + F(t), \quad (1)$$

где A – постоянная матрица, а вектор-функция $F(t)$ предполагается непрерывной на промежутке $(\tau, +\infty)$. В §2 было показано, что исследование на устойчивость произвольного решения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1) сводится к исследованию на устойчивость решения $Y \equiv 0$ соответствующей однородной системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y. \quad (2)$$

Ответ же на вопросы об устойчивости, асимптотической устойчивости решения $Y \equiv 0$ системы (2) дает следующая теорема.

Теорема. Пусть имеется линейная однородная система с постоянными коэффициентами (2). Пусть λ_j ($j = \overline{1, m}$) – собственные числа матрицы A . Тогда:

I. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (2) устойчиво лишь тогда, когда $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ для любого $j = \overline{1, m}$; при этом каждому λ_j , у которого $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, в канонической форме J матрицы A должны соответствовать клетки Жордана лишь первого порядка.

II. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (2) асимптотически устойчиво лишь тогда, когда $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для любого $j = \overline{1, m}$.

► Мы знаем, что любое решение системы (2) определено на интервале $(-\infty; +\infty)$. Поэтому всегда в качестве t_0 можно взять $t_0 = 0$.

Возьмем фундаментальную матрицу решений системы (2), нормированную в точке $t_0 = 0$. Такой матрицей является матрица e^{At} . Найдем условия, при которых матрица e^{At} является ограниченной, и условия, при которых $\|e^{At}\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Пусть $J = \operatorname{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$ – каноническая форма матрицы A . Пусть $A = SJS^{-1}$ ($\det S \neq 0$). Тогда

$$e^{At} = S \cdot e^{Jt} \cdot S^{-1}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что матрицы e^{At} и e^{Jt} одновременно либо ограниченные, либо неограниченные, и их нормы одновременно либо стремятся к нулю, либо не стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому можно исследовать лишь матрицу e^{Jt} .

Мы знаем, что $e^{Jt} = \operatorname{diag}[e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_m t}]$, где

$$e^{J_j t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ te^{\lambda_j t} & e^{\lambda_j t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t^{n_j-1} e^{\lambda_j t}}{(n_j-1)!} & \frac{t^{n_j-2} e^{\lambda_j t}}{(n_j-2)!} & \frac{t^{n_j-3} e^{\lambda_j t}}{(n_j-3)!} & \dots & te^{\lambda_j t} & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m}.$$

1) Пусть λ_j ($j = \overline{1, m}$) такие, что $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$. Но тогда при любом $k = \overline{0, n_j-1}$ будет $\frac{t^k e^{\lambda_j t}}{k!} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Следовательно, $\|e^{J_j t}\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, а значит, и $\|e^{J t}\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

2) Пусть среди собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матрицы A имеется хотя бы одно λ_j такое, что $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$. Это означает, что либо $\lambda_j = 0$, либо $\lambda_j = i\beta$ ($\beta \neq 0$). В обоих этих случаях $|e^{\lambda_j t}| = 1$ для любого t и, следовательно, величина $\frac{t^k e^{\lambda_j t}}{k!}$ не стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, причем эта величина будет ограниченной лишь тогда, когда $k = 0$. Значит, в обоих этих случаях $\|e^{J_j t}\|$ не стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, причем $\|e^{J_j t}\|$ будет ограниченной лишь тогда, когда J_j (в канонической форме J матрицы A) является клеткой Жордана лишь первого порядка.

3) Пусть, наконец, среди собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матрицы A имеется хотя бы одно λ_j такое, что $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$. Но тогда при любом $k = \overline{0, n_j-1}$ величина $\frac{t^k e^{\lambda_j t}}{k!}$ будет неограниченной на промежутке $[t_0, +\infty)$. Значит, будет неограниченной на промежутке $[t_0, +\infty)$ и $\|e^{J_j t}\|$.

Из анализа случаев, когда $\|e^{J_j t}\|$ – ограниченная, неограниченная и когда $\|e^{J_j t}\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ следуют утверждения I и II теоремы.

§ 4. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами

Пусть имеется линейная однородная система с периодическими коэффициентами

$$\frac{dY}{dt} = A(t) \cdot Y, \quad (1)$$

где $A(t) \in C(\mathbf{R})$ и такая, что $A(t + \omega) = A(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Ранее было показа-

но, что система (1) преобразованием

$$Y = p(t) \cdot Z, \quad (2)$$

где $p(t)$ – не особая, ω -периодическая матрица, переводится в систему

$$\frac{dZ}{dt} = R \cdot Z. \quad (3)$$

В системе (3) $R = \frac{1}{\omega} \ln C$ – постоянная матрица; C – матрица монодромии системы (1).

Так как (3) – линейная однородная система с постоянными коэффициентами, то к ней применима теорема, доказанная в §3.

Пусть μ_j – собственные числа матрицы C (мультипликаторы системы (1)); λ_j – собственные числа матрицы R (характеристические показатели системы (1)). Так как $\lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln \mu_j = \frac{1}{\omega} [\ln |\mu_j| + i \arg \mu_j]$, то $\operatorname{Re} \lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln |\mu_j|$, и поэтому

$$\operatorname{Re} \lambda_j \begin{cases} < 0, & \text{если } |\mu_j| < 1, \\ = 0, & \text{если } |\mu_j| = 1, \\ > 0, & \text{если } |\mu_j| > 1. \end{cases}$$

Отсюда, принимая во внимание теорему, доказанную в §3, приходим к заключению, что справедливы утверждения:

I. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво лишь тогда, когда $|\mu_j| \leq 1$ для любого $j = \overline{1, m}$; при этом каждому μ_j , у которого $|\mu_j| = 1$ в канонической форме матрицы монодромии C должны соответствовать клетки Жордана лишь первого порядка.

II. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) асимптотически устойчиво лишь тогда, когда $|\mu_j| < 1$ для любого $j = \overline{1, m}$.

§ 5. Нелинейные системы. Устойчивость по первому приближению

Пусть имеется нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y). \quad (1)$$

Пусть $F(t, Y) \in C(G)$ и $\frac{\partial F(t, Y)}{\partial Y} \in C(G)$, где $(G) = (\tau, +\infty) \times (D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^n$, $\tau \geq -\infty$.

В §1 было показано, что вопрос об устойчивости произвольного движения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) заменой $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X$ сводится к вопросу об устойчивости движения $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы

$$\frac{dX}{dt} = \tilde{F}(t, X), \quad (2)$$

где $\tilde{F}(t, X) = F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X) - F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0))$ и, следовательно, $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$.

Одним из основных методов исследования на устойчивость движения $X \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$, нелинейной системы (2) является метод исследования на устойчивость по первому приближению. Этот метод заключается в том, что в окрестности точки $X \equiv 0$ систему (2) представляют в виде

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X + f(t, X), \quad (3)$$

где $A(t) = \frac{\partial \tilde{F}(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0))}{\partial X}$ – матрица-функция размера $n \times n$, $f(t, X) \in C(\tilde{G})$,

$$\frac{\partial f(t, X)}{\partial X} \in C(\tilde{G}), \quad f(t, 0) \equiv 0 \quad \text{в области} \quad (\tilde{G}) = (\tau, +\infty) \times (\tilde{D}), \quad (\tilde{D}) \subset \mathbf{R}^n;$$

$$\frac{\|f(t, X)\|}{\|X\|} \xrightarrow{\|X\| \rightarrow 0} 0.$$

Если в (3) отбросить член $f(t, X)$, имеющий порядок выше первого относительно $\|X\|$ при $\|X\| \rightarrow 0$, то получим линейную систему $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X$, называемую системой первого приближения для системы (3), а, следовательно, и системы (2). Если матрица $A(t)$ оказывается постоянной, то система (3) называется стационарной в первом приближении.

Для стационарной в первом приближении системы (3) следующая теорема указывает условия применимости метода исследования по первому приближению.

Теорема. Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + f(t, X), \quad (\tilde{3})$$

где A – постоянная матрица размера $n \times n$, $f(t, X)$ – вектор-функция, такая, что:

1) $f(t, X) \in C(\tilde{G})$, $f(t, X) \in \text{Lip}_X(\tilde{G})$ – локально и $f(t, 0) \equiv 0$ в области $(\tilde{G}) = \{t \in (\tau, +\infty), \|X\| < a\}$;

2) для любого числа $\alpha > 0$ существуют число $T (T > \tau)$ и число $h (0 < h < a)$ такие, что $\|f(t, X)\| < \alpha \cdot \|X\|$, для $t \geq T$ и $\|X\| \leq h$.

Тогда, если все собственные числа λ_j матрицы A имеют отрицательные вещественные части: $\text{Re} \lambda_j < 0$, то решение $X \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$ системы $(\tilde{3})$ асимпто-

тически устойчиво.

► По условию, $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для любого $j = \overline{1, m}$. Но тогда существует число $\lambda > 0$ такое, что $\operatorname{Re} \lambda_j < -\lambda$, для любого $j = \overline{1, m}$. Рассмотрим матрицу e^{At} . Существует число k ($k \geq 1$) такое, что $\|e^{At}\| \leq k \cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

Возьмем число $\alpha > 0$ любое, но такое, чтобы было

$$n \cdot k \cdot \alpha < \lambda. \quad (4)$$

По условию 2) теоремы, взятому числу $\alpha > 0$ отвечают числа T и h ($T > \tau$, $0 < h < a$) такие, что в $(\overline{G'}) = \{t \geq T, \|X\| \leq h\}$ будет $\|f(t, X)\| < \alpha \cdot \|X\|$.

Покажем сначала, что решение $X \equiv 0$ системы $(\tilde{3})$ будет устойчивым. Для этого берем произвольное число t_0 ($t_0 > T$) и берем $\varepsilon > 0$ любое, но такое, чтобы было $0 < \varepsilon < h$. Затем берем ξ произвольное, но такое, что $\|\xi\| < h$.

Рассмотрим решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы $(\tilde{3})$. Имеем $\varphi(t, t_0, \xi)|_{t=t_0} = \xi$. Следовательно, $\|\varphi(t, t_0, \xi)\|_{t=t_0} = \|\xi\| < h$. Но тогда существует промежуток $[t_0, \beta)$ такой, что $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < h$ для любого t из промежутка $[t_0, \beta)$. Убедимся, что взятому числу $\varepsilon > 0$ можно сопоставить число $\delta > 0$ такое, что для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi\| < \delta$, будет $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, \beta)$. Для этого наряду с системой $(\tilde{3})$ рассматриваем вспомогательную линейную систему

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + f(t, \varphi(t, t_0, \xi)), \quad (\tilde{\tilde{3}})$$

где $f(t, \varphi(t, t_0, \xi)) = q(t)$ – вектор-функция, зависящая только от t . Нетрудно понять, что $q(t) \in C([t_0, \beta))$ и что система $(\tilde{\tilde{3}})$ определена в области $(G_1) = \{t_0 \leq t < \beta, \|X\| < +\infty\}$. В области (G_1) построим общее решение системы $(\tilde{\tilde{3}})$. Оно, как мы знаем, будет таким:

$$X = e^{A(t-t_0)} \cdot \left[C + \int_{t_0}^t e^{-A(s-t_0)} \cdot f(s, \varphi(s, t_0, \xi)) ds \right].$$

Выделим из него решение, удовлетворяющее начальному условию $X|_{t=t_0} = \xi$.

Получим

$$X = e^{A(t-t_0)} \cdot \left[\xi + \int_{t_0}^t e^{-A(s-t_0)} \cdot f(s, \varphi(s, t_0, \xi)) ds \right]. \quad (5)$$

Заметим, что решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы $(\tilde{3})$ также является решением системы $(\tilde{\tilde{3}})$, удовлетворяющим начальному условию $X|_{t=t_0} = \xi$. Следовательно-

но, решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ совпадает с решением (5), т.е.

$$\varphi(t, t_0, \xi) = e^{A(t-t_0)} \cdot \left[\xi + \int_{t_0}^t e^{-A(s-t_0)} \cdot f(s, \varphi(s, t_0, \xi)) ds \right]. \quad (6)$$

Произведем оценку решения $X = \varphi(t, t_0, \xi)$. Из (6) имеем:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, t_0, \xi)\| &= \|e^{A(t-t_0)} \cdot \xi\| + \left\| e^{A(t-t_0)} \cdot \int_{t_0}^t e^{-A(s-t_0)} \cdot f(s, \varphi(s, t_0, \xi)) ds \right\| \leq \\ &\leq n \|e^{A(t-t_0)}\| \cdot \|\xi\| + \left\| \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \cdot f(s, \varphi(s, t_0, \xi)) ds \right\| \leq \\ &\leq n \|e^{A(t-t_0)}\| \cdot \|\xi\| + \int_{t_0}^t n \|e^{A(t-s)}\| \cdot \|f(s, \varphi(s, t_0, \xi))\| ds. \end{aligned}$$

У нас $\|e^{A(t-t_0)}\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)}$; $\|e^{A(t-s)}\| \leq ke^{-\lambda(t-s)}$, при $t \geq t_0 > T$, и $t_0 \leq s \leq t$; $\|f(s, \varphi(s, t_0, \xi))\| \leq \alpha \cdot \|\varphi(s, t_0, \xi)\|$, ибо $s > T$ и $\|\varphi(s, t_0, \xi)\| < h$ для $s \in [t_0, \beta)$. Поэтому

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \leq nk \|\xi\| e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^t nke^{-\lambda(t-s)} \cdot \alpha \cdot \|\varphi(s, t_0, \xi)\| ds.$$

Умножив обе части последнего равенства на $e^{\lambda(t-t_0)}$, получим

$$e^{\lambda(t-t_0)} \cdot \|\varphi(t, t_0, \xi)\| \leq nk \|\xi\| + nk\alpha \cdot \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} \cdot \|\varphi(s, t_0, \xi)\| ds.$$

Заметим, что $\tilde{\lambda} = nk \cdot \|\xi\| = \text{const} > 0$; $\mu = nk\alpha = \text{const} > 0$; $e^{\lambda(t-t_0)} \cdot \|\varphi(t, t_0, \xi)\| = u(t)$ – положительная непрерывная функция. Видим, что функция $u(t)$ на промежутке $[t_0, \beta)$ удовлетворяет условиям леммы Гронуола. Поэтому будем иметь $u(t) \leq \tilde{\lambda} e^{\mu(t-t_0)}$, $t \in [t_0, \beta)$, или

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| e^{\lambda(t-t_0)} \leq nk \|\xi\| \cdot e^{nk\alpha(t-t_0)},$$

отсюда $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \leq nk \|\xi\| \cdot e^{(nk\alpha - \lambda)(t-t_0)}$, $t \in [t_0, \beta)$. Так как $t - t_0 \geq 0$, $t \in [t_0, \beta)$; $nk\alpha - \lambda < 0$ (см. (4)), то $e^{(nk\alpha - \lambda)(t-t_0)} \leq 1$ и, следовательно, $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \leq nk \|\xi\|$. Но тогда $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, \beta)$, если брать ξ удовлетворяющим условию $\|\xi\| < \delta$, где $\delta = \frac{\varepsilon}{nk}$.

Итак, мы убедились, что любому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие

число $\delta > 0$ ($\delta = \frac{\varepsilon}{nk}$) такое, для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi\| < \delta$, будет $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon$, если $t \in [t_0, \beta)$.

Пусть ξ – любой, но такой, что $\|\xi\| < \delta$ ($\delta = \frac{\varepsilon}{nk}$). Пусть $[t_0, \beta)$ – максимальный промежуток, на котором решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы (3) удовлетворяет неравенству $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < h$. Покажем, что $\beta = +\infty$.

Рассуждаем от противного, а именно, предполагаем, что $\beta < +\infty$. Но тогда решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, \beta)$, обладает свойством: точки $(t, \varphi(t, t_0, \xi))$, $t \in [t_0, \beta)$, оказываются принадлежащими ограниченной замкнутой области $(\bar{G}^*)$, содержащейся в области $(\tilde{G})$ ($(\bar{G}^*) \subset (\tilde{G})$). Значит, решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, \beta)$, продолжимо вправо, а, следовательно, существует $\lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t, t_0, \xi) = \xi_1$, причем точка $(\beta, \xi_1) \in (\bar{G}^*) \subset (\tilde{G})$.

Рассмотрим вектор $\varphi(\beta, t_0, \xi) = \xi_1$. Из предположения, что промежуток $[t_0, \beta)$ – максимальный вправо, на котором решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ удовлетворяет неравенству $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < h$, следует, что

$$\|\xi_1\| = h \quad (*)$$

(иначе промежуток $[t_0, \beta)$ не был бы максимальным вправо в указанном выше смысле). Но, с другой стороны, из неравенства

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon \quad (7)$$

при $t \rightarrow \beta - 0$ находим

$$\|\varphi(\beta, t_0, \xi)\| = \|\xi_1\| \leq \varepsilon < h. \quad (**)$$

Сопоставляя соотношения (*) и (**), видим, что пришли к противоречию. Значит, наше предположение, что $\beta < +\infty$, неверно, и, следовательно, $\beta = +\infty$.

Таким образом, $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon$ для $t \in [t_0, +\infty)$, если только $\|\xi\| < \delta$, где $\delta = \frac{\varepsilon}{nk}$. Последнее означает, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (3) устойчиво.

Покажем теперь, что решение системы $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (3) асимптотически устойчиво.

Для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi\| < h$, и для всех $t \in [t_0, +\infty)$ была получена следующая оценка решения $X = \varphi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, \beta)$, системы (3):

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \leq nk\|\xi\| \cdot e^{(nk\alpha - \lambda)(t-t_0)}. \quad (8)$$

Так как $\delta = \frac{\varepsilon}{nk} < \varepsilon$, а $\varepsilon < h$, и так как $\beta = +\infty$, то оценка (8) будет верна для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi\| < \delta$, и для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Принимая во внимание, что $(nk\alpha - \lambda)(t - t_0) < 0$ для $t \in [t_0, +\infty)$, получаем из (8): $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Следовательно, решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (3) асимптотически устойчиво. ◀

Замечание. Доказанная теорема дает весьма удобный признак асимптотической устойчивости решений широкого класса систем дифференциальных уравнений и очень часто применяется в практических задачах.

Изложенное в настоящей главе следует рассматривать лишь как скромное введение в изучение начал теории устойчивости движения, созданной великим русским ученым Александром Михайловичем Ляпуновым и изложенной им в сочинении "Общая теория устойчивости движения". Особенная значимость этой теории состоит в том, что мы, часто не умея интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее можем делать заключения об устойчивости или неустойчивости движения, определяемого этой системой.

Литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
2. Бибииков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л.: Изд. Ленинградского университета, 1981.
3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. Ленинградского университета, 1955.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1973.
7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

Оглавление

ГЛАВА 1. НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	3
§1. Основные понятия и определения	3
§2. Некоторые сведения из теории вектор-функций	4
§3. Существование и единственность решения задачи Коши нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	10
§4. Общее решение и общий интеграл нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	17
§5. Методы интегрирования нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	25
§6. Интегрирование линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка	32
§7. Продолжение решений. Нелокальные свойства решений	51
ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	60
§1. Некоторые сведения из теории матриц	60
§2. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Простейшие свойства решений линейных однородных систем	62
§3. Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Признаки линейной независимости решений линейной однородной системы	65
§4. Теорема о составлении общего решения линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	67
§5. Формула Остроградского – Лиувилля	69
§6. Теорема о составлении общего решения линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	71
§7. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения решения $Y_*(x) = \Psi(x)$ линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	72
§8. Матричные последовательности и ряды	73
§9. Матричные степенные ряды	75
§10. Экспонента от матрицы	80
§11. Матрица-функция $e^{A \cdot x}$	81
§12. Умножение матричных рядов	83
§13. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами	88
§14. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами	92
ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	93
§1. Логарифмы матриц	93
§2. Линейные однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами	97
§3. Мультипликаторы	98

§4. Структура фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы с периодическими коэффициентами	99
§5. Приведение линейной однородной системы с периодическими коэффициентами к линейной однородной системе с постоянными коэффициентами	102
ГЛАВА 4. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	103
§1. Постановка задачи об устойчивости. Определения.....	103
§2. Устойчивость линейных систем	108
§3. Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами	113
§4. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами	114
§5. Нелинейные системы. Устойчивость по первому приближению	115
Литература	120

АКСЁНОВ Анатолий Петрович

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор
Технический редактор
Корректор
Директор Издательства СПбГТУ А.В. Иванов

Лицензия ЛР №020593 от 07.08.97

Подписано в печать	Формат 60×84/16.	
Печать офсетная. Усл. печ. л.	Уч.-изд. л.	Тираж
Заказ	С	

Санкт-Петербургский государственный технический университет.
Издательство СПбГТУ, член Издательско-Полиграфической ассоциации вузов
Санкт-Петербурга.

Адрес университета и издательства: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая 29.